Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 2

ГЕОФИЗИКА

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

СХЕМА КОЛЕБАНИЙ РЕЖИМА В КОНВЕКЦИОННОМ ПОТОКЕ

На опытах Н. Л. Бызовой ([1,2]) была впервые доказана возможность возникновения самовозбуждающихся колебаний в потоках тепловой конвекции: при одностороннем нагревании продолговатого сосуда с водой в нем были обнаружены устойчивые незатухающие колебания скоростей примерно на $\pm 30\%$ от средней величины и одновременные колебания температуры воды с тем же периодом, составляющим от 3 до 10 мин.

Тот же автор отметил отчетливо выраженную зависимость периода колебаний от длины сосуда и от разности температур между нагретой и холодной частью дна. Именно, оказалось, что период колебаний равен промежутку времени, необходимому для обхода всего сосуда по средней линии тока со средней скоростью конвекционного потока. Чрезвычайно интересно, что период колебаний оказался обратно пропорциональным корню квадратному из разности температур между нагретой и холодной частью дна сосуда.

Посредством «теневого» метода Бызовой удалось проследить ([2]) на фотографиях за поведением тонких струек, прорывающих придонную пленку и восходящих кверху над нагретой частью дна. Обнаружилось, что пучок этих струек прижимается к торцевой стенке сосуда в той фазе явления, когда скорость потока больше всего превышает среднюю. Напротив, когда скорость оказывается сниженной до минимальной, пучок струек значительно расширяется, свидетельствуя о повышенной теплоотдаче от нагретого дна массе воды. Исходя из этого обстоятельства, Бызова дала правильное качественное объяснение причины, порождающей колебания и поддерживающей их в потоке. В первой из работ ([1]) она привела аналитическую схему, позволяющую разобраться в сути проделанных опытов.

Попытаемся здесь наметить иную, несколько более общую схему, которая позволила бы в будущем перейти от опытов в малых сосудах с водой к исследованию систем, близких к природным потокам адвекции в атмосфере. Попытаемся найти тот тип соотношений между притоком тепла и скоростями потока, при наличии которого могут возникать колебания режима в этих потоках.

Допустим, что длина сосуда L значительно превосходит его высоту h и что полную длину средней линии тока можно считать равной $2L$. В таком случае время T_0 обхода частицы по такой линии тока на основании опытов может быть связано со средней скоростью u_0 потока простым соотношением:

$$u_0 = \frac{2L}{T_0}. \tag{1}$$

Пусть в некоторый момент мгновенное значение u скорости потока превышает ее среднее значение. Тогда, на основании фотографий цитированного автора, надо будет положить, что количество тепла, отдаваемого воде в единицу времени с единицы поверхности нагретого дна, будет уменьшаться по сравнению со средним значением Q_0. Закон уменьшения, по всей вероятности, весьма сложен и должен быть выражен некоторым рядом, содержащим члены с разностью $u - u_0$ в различных степенях, а также и производные. Для нашей схемы мы возьмем только первый член этого ряда и положим

$$\frac{\partial Q}{\partial} = -M(u - u_0). \tag{2}$$

Здесь M — пока неопределенный коэффициент, физический смысл которого попытаемся выяснить в дальнейшем.

Но помимо (2) между количеством подводимого тепла Q и скоростью u легко установить и обратную связь; совершенно очевидно, что при возрастании Q должна возрастать скорость потока тепловой конвекции, а при уменьшении — уменьшаться. Вновь пренебрегая всеми членами неизвестного нам ряда, кроме первого, запишем закон изменения u в зависимости от подвода тепла Q в простейшей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = N(Q - Q_0). \tag{3}$$

Вновь входит здесь пока неопределенный коэффициент N, физический смысл которого будет выяснен одновременно с M.

Продифференцируем (3) вторично по t и подставим в полученное уравнение второго порядка выражение $\partial Q / \partial t$ из (2). Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial^2 (u - u_0)}{\partial t^2} + MN(u - u_0) = 0, \tag{4}$$

которое, как известно, описывает гармонические колебания величины $u - u_0$ с периодом T_0, определяемым из соотношения

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{MN}}. \tag{5}$$

Так же просто можно доказать, исходя из уравнений (2), (3), что с тем же периодом T_0 должна колебаться величина $Q - Q_0$.

Для выяснения физического смысла M и N воспользуемся известными формулами размерностей для тепловых систем. Именно, примем, прежде всего, что скорость u_0 выражается через характеристический размер h (в данном случае h — высота слоя воды в сосуде), ускорение в поле тяжести g, коэффициент β объемного расширения воды, разность температур ϑ_0 воды в среднем ее слое между теплой и холодной ее частью, и, наконец, через безразмерное число Грасгофа Gr. Последнее, в свою очередь, связано с упомянутыми параметрами и кинематической вязкостью ν воды.

В известной формуле, представляющей u_0

$$u_0 = \sqrt{hg\beta\vartheta_0}\,(\mathrm{Gr})^n \tag{6}$$

Бызова полагает $n = 0$, с чем следует согласиться. Действительно, с одной стороны, основной механизм явления здесь как-то связан тонкой придонной пленкой, сквозь которую прорываются струйки; с другой стороны, опыты показывают независимость явления от вязкости при изменении последней в широких пределах.

Не отступая далеко от истины, положим вместе с цитированным автором, что $n = 0$. Тогда вместо (6) можно будет записать:

$$u_0 = \sqrt{hg\beta\vartheta_0}. \tag{7}$$

С другой стороны, на основании (1) и (5):

$$u_0 = \frac{L}{\pi}\sqrt{MN}. \tag{8}$$

Приравняв друг другу правые части (7) и (8), произведя простейшие преобразования и учтя, что $hg\beta\vartheta_0 / L$ представляет собой градиент Γ_0 давления (средний), отнесенный к единице плотности δ, получим выражение:

$$MN = \frac{\pi^2}{L}\frac{hg\beta\vartheta_0}{L} = \frac{\pi^2}{L}\frac{\Gamma_0}{\delta}. \tag{9}$$

Выразив отсюда N через другие величины $N = \frac{\pi^2}{ML}\frac{\Gamma_0}{\delta}$ и вспомнив уравнение (3), перепишем последнее в новой форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi^2}{ML}\frac{\Gamma_0}{\delta}(Q - Q_0). \tag{10}$$

Но ведь совершенно очевидно, что здесь величина π^2 / ML является постоянной, обладающей размерностью Q^{-1}. Следовательно, мы вправе положить

$$\frac{\pi^2}{ML} = \frac{k}{Q_0}, \tag{11}$$

причем k — безразмерный числовой коэффициент.

Воспользовавшись новыми обозначениями, легко записать уравнения (3), (10) в окончательном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\Gamma_0}{\delta}\frac{Q - Q_0}{Q_0}. \tag{12}$$

Физический смысл этого уравнения не нуждается в разъяснениях: уравнение (12) показывает, как ускорение $\partial u / \partial t$ в потоке тепловой конвекции управляется средним градиентом Γ_0, отнесенным к единице плотности, и относительным приростом $(Q - Q_0) / Q_0$ теплоотдачи от дна.

Столь же просто преобразуется уравнение (2). Действительно, внеся в него выражение M из (11), запишем

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\pi^2}{k}\frac{Q_0}{L}(u - u_0), \tag{13}$$

или, вспомнив еще (1):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{2\pi^2}{k}\frac{Q_0}{T_0}\frac{u - u_0}{u_0}. \tag{14}$$

Как видим, здесь изменение теплоотдачи во времени $\partial Q / \partial t$ выражается чрезвычайно просто через относительный прирост $(u - u_0) / u_0$ скорости потока тепловой конвекции — формулой, сходной по строению с (12). Остается еще отметить, что, на основании (9), собственный период T_0 колебаний системы может быть вместо (5) выражен иным соотношением:

$$\frac{T_0}{2} = \sqrt{\frac{\delta L}{\Gamma}}. \tag{15}$$

Все приведенные выкладки велись по грубо схематизированному пути — единственному доступному в настоящее время. Впрочем, едва ли в будущем удастся описать сложное взаимодействие двух систем в опытах Бызовой (собственно-конвекционного потока и пульсирующих струй, поднимающихся с нагретого дна) точными и строгими уравнениями термо-гидромеханики. Поэтому весьма важно посмотреть, насколько приближаются к истине наши выкладки с количественной стороны.

Для суждения об этом заимствуем из опытов Бызовой значения L, h, ϑ_0. Положим в (15) $\Gamma_0 = 1{,}96 \cdot 10^{-2}$, $\delta = 1$ и $L = 100$. Тогда окажется, что по (15) должно быть $T_0/2 = 72$ сек. $= 1{,}2$ мин. В действительности же было $T_0/2 \geqslant 1{,}5$ мин.

Как видим, здесь порядок вычисленной величины совпадает с порядком величины наблюденной. На более близкое совпадение самих чисел, разумеется, нельзя претендовать, поскольку во всех выкладках не учитывалось ни трение в потоке тепловой конвекции, ни потери тепла во внешнюю среду*.

Следовательно, даже пренебрегая членами высших порядков в сложных рядах (кроме первого), при установлении зависимости $\partial u / \partial t$ от Q и $\partial Q / \partial t$ от u можно получить совсем не плохую характеристику колебаний в потоках тепловой конвекции; в частности, можно составить представление о тех условиях, которые должны выполняться в колебательной системе.

Что касается первого из этих условий, выражаемого уравнением (12), то оно выполняется во многих случаях: прирост среднего значения градиента давления в потоке тепловой конвекции естественно полагать пропорциональным относительному приросту теплоотдачи от нагревателя; в свою очередь, прирост среднего градиента давления должен вызвать ускорение потока, пропорциональное приросту градиента.

Значит, в вопросе о возникновении колебаний решающее значение имеет второе условие, выражаемое уравнением (14): колебания должны возникать в тех случаях, когда скорость убывания теплоотдачи от нагревателя пропорциональна относительному приросту скорости потока.

Разумеется, пропорциональность в точном смысле слова обязательна лишь в линейной задаче. В действительности вместо уравнений (12), (14) следовало бы записать какие-то более сложные выражения, которые неминуемо приводят к нелинейным уравнениям. Как известно, возникновение нелинейных соотношений типично именно для автоколебательных систем.

Дальнейшие исследования необходимо направить, прежде всего, на поиски систем, удовлетворяющих условию (14), а вслед за тем — на усовершенствование, уточнение самих схематических уравнений (12), (14).

В частности, необходимо с этой точки зрения исследовать замкнутое «кольцо» зональной циркуляции, в которой, как недавно выяснилось [3], заведомо происходят незатухающие колебания скоростей.

Морской гидрофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
17 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Л. Бызова, ДАН, **72**, № 4, 675 (1950). [2] Н. Л. Бызова, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 84 (1951). [3] В. В. Шулейкин, ДАН, **72**, № 4 (1950).

* Вычисленная величина периода может быть несколько более приближена к наблюденной, если вместо грубоприближенной длины замкнутого пути части $2L$ будет введена более точная величина: $2L + 2h$. Тогда величину T, полученную нами, придется помножить на поправочный коэффициент: $\left(1 + \frac{h}{L}\right)$.