Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ТУГАНОВ

О НЕКОТОРЫХ ТРОЙНЫХ СИСТЕМАХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 X 1951)

I. Тройная система поверхностей, пересекающихся по аффинно-базисным линиям. Рассмотрим тройную систему поверхностей в аффинном пространстве. Определим ее под условием, что на каждой поверхности одно семейство линий пересечения проектируется по направлениям линий другого семейства на прямые несобственной плоскости. Линии первого семейства суть обобщенные аффинно-базисные линии [1].

По условию имеем:

$$(\mathbf{e}_2 d\mathbf{e}_2 d^2\mathbf{e}_2) \equiv 0 \pmod{\omega^2;\ \omega^3},$$

или, вводя функцию λ из условия $\omega_2^1 - \lambda\omega_2^3 \equiv 0 \pmod{\omega^2;\ \omega^3}$,

$$\left[\omega_2^1 - \lambda\omega_2^3;\ \omega^2;\ \omega^3\right] = 0; \quad \left[d\lambda - \lambda^2\omega_1^3 + \lambda\left(\omega_1^1 - \omega_3^3\right) + \omega_3^1;\ \omega^2;\ \omega^3\right) = 0$$

и аналогично (*)

$$\left[\omega_3^2 - \mu\omega_3^1;\ \omega^3;\ \omega^1\right] = 0; \quad \left[d\mu - \mu^2\omega_2^1 + \mu\left(\omega_2^2 - \omega_1^1\right) + \omega_1^2;\ \omega^3;\ \omega^1\right] = 0;$$

$$\left[\omega_1^3 - \nu\omega_1^2;\ \omega^1;\ \omega^2\right] = 0; \quad \left[d\nu - \nu^2\omega_3^2 + \nu\left(\omega_3^3 - \omega_2^2\right) + \omega_2^3;\ \omega^1;\ \omega^2\right] = 0.$$

Присоединяя основные уравнения теории тройных систем поверхностей [2]

$$\left[\omega_1^3\omega^1\omega^3\right] + \left[\omega_2^3\omega^2\omega^3\right] = 0; \quad \left[\omega_3^1\omega^2\omega^1\right] + \left[\omega_3^1\omega^3\omega^1\right] = 0;$$

$$\left[\omega_3^2\omega^3\omega^2\right] + \left[\omega_1^2\omega^1\omega^2\right] = 0, \qquad (**)$$

получим все уравнения проблемы.

Система уравнений (*) и (**) замкнута и в инволюции. Характеристические формы суть: ω_1^2, ω_1^3, ω_2^1, ω_2^3, ω_3^1, ω_3^2, $\theta_1 = d\lambda - \lambda^2\omega_1^3 + \lambda\left(\omega_1^1 - \omega_3^3\right) + \omega_3^1$, $\theta_2 = d\mu - \mu^2\omega_2^1 + \mu\left(\omega_2^2 - \omega_1^1\right) + \omega_1^2$; $\theta_3 = d\nu + \nu^2\omega_2^3 + \nu\left(\omega_3^3 - \omega_2^2\right) + \omega_2^3$. Характеры $s_1 = 0$, $s_2 = 9$; число Картана $Q = 18$; произвол общего интегрального элемента $N = 18$. Рассматриваемая тройная система поверхностей существует с произволом в 9 функций 2 аргументов.

II. Тройная система поверхностей, возникающая из ортогональных сеток. Рассмотрим в евклидовом пространстве тройную систему поверхностей. Координатные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ берем единичными. На каждой поверхности возьмем ортогональную сеть линий. Тройную систему определим из условия, что направления касательных к двум бесконечно близким линиям каждого семейства ортогональной сети, проведенных в точках линии другого семейства сети, компланарны с направлением касательной к линии пересечения поверхностей системы. Уравнения двух семейств ортогональной сети на поверхности $\omega^3 = 0$ будут

$$\omega^2 - \lambda\omega^1 = 0; \quad \omega^2 - \lambda'\omega^1 = 0,$$

и условие того, что вектор $\mathbf{e}_3$ компланарен с векторами $\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2$, $d(\mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2)$ и с векторами $\mathbf{e}_1 + \lambda'\mathbf{e}_2$, $d(\mathbf{e}_1 + \lambda'\mathbf{e}_2)$, выразится через:

$$\left[d\lambda - \lambda^2\omega_2^1 + \lambda\left(\omega_2^2 - \omega_1^1\right) + \omega_1^2;\ \omega^3;\ \omega^2 - \lambda'\omega^1\right] = 0, \tag{1}$$

$$\left[d\lambda' - \lambda'^2\omega_2^1 + \lambda'\left(\omega_2^2 - \omega_1^1\right) + \omega_1^2;\ \omega^3;\ \omega^2 - \lambda\omega^1\right] = 0, \tag{1'}$$

$$\lambda' = -\frac{1 + \lambda\cos\varphi_3}{\lambda + \cos\varphi_3}.$$

Требуя выполнения аналогичных условий для ортогональных сеток на поверхностях $\omega^1 = 0$ и $\omega^1 = 0$, получим:

$$\left[d\mu - \mu^2\omega_3^2 + \mu\left(\omega_3^3 - \omega_2^2\right) + \omega_2^3;\ \omega^1;\ \omega^3 - \mu'\omega^2\right] = 0, \tag{2}$$

$$\left[d\mu' - \mu'^2\omega_3^2 + \mu'\left(\omega_3^3 - \omega_2^2\right) + \omega_2^3;\ \omega^1;\ \omega^3 - \mu\omega^2\right] = 0, \tag{2'}$$

$$\mu' = -\frac{1 + \mu\cos\varphi_1}{\mu + \cos\varphi_1};$$

$$\left[d\nu - \nu^2\omega_1^3 + \nu\left(\omega_1^1 - \omega_3^3\right) + \omega_3^1;\ \omega^2;\ \omega^1 - \nu'\omega^3\right] = 0, \tag{3}$$

$$\left[d\nu' - \nu'^2\omega_1^3 + \nu'\left(\omega_1^1 - \omega_3^3\right) + \omega_3^1;\ \omega^2;\ \omega^1 - \nu\omega^3\right] = 0, \tag{3'}$$

$$\nu' = -\frac{1 + \nu\cos\varphi_2}{\nu + \cos\varphi_2},$$

где φ_1, φ_2, φ_3 — углы между осями репера.

Мы получим все уравнения проблемы, если присоединим еще основные уравнения теории тройных систем поверхностей:

$$-\sin\varphi_1 d\varphi_1 = \left(\omega_2^2 + \omega_3^3\right)\cos\varphi_1 + \omega_2^1\cos\varphi_2 + \omega_3^1\cos\varphi_3 + \omega_2^3 + \omega_3^2;$$

$$-\sin\varphi_2 d\varphi_2 = \omega_1^2\cos\varphi_1 + \left(\omega_3^3 + \omega_1^1\right)\cos\varphi_2 + \omega_3^2\cos\varphi_3 + \omega_3^1 + \omega_1^3;$$

$$-\sin\varphi_3 d\varphi_3 = \omega_1^3\cos\varphi_1 + \omega_2^3\cos\varphi_2 + \left(\omega_1^1 + \omega_2^2\right)\cos\varphi_3 + \omega_1^2 + \omega_2^1;$$

$$\omega_1^1 + \omega_1^2\cos\varphi_3 + \omega_1^3\cos\varphi_2 = 0; \quad \omega_2^2 + \omega_2^3\cos\varphi_1 + \omega_2^1\cos\varphi_3 = 0;$$

$$\omega_3^3 + \omega_3^2\cos\varphi_1 + \omega_3^1\cos\varphi_2 = 0;$$

$$\left[\omega^1\omega_1^3\omega^3\right] + \left[\omega^2\omega_2^3\omega^3\right] = 0; \quad \left[\omega^2\omega_2^1\omega^1\right] + \left[\omega^3\omega_3^1\omega^1\right] = 0; \quad \left[\omega^3\omega_3^2\omega^2\right] + \left[\omega^1\omega_1^2\omega^2\right] = 0.$$

Число характеристических форм 9 ($d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$, ω_1^2, ω_1^3, ω_2^1, ω_2^3, ω_3^1, ω_3^2) характеры $s_1 = 0$, $s_2 = 9$; число Картана $Q = 18$; произвол общего интегрального элемента $N = 18$. Система в инволюции и определяет решение проблемы с произволом в 9 функций 2 аргументов.

Можно показать, что среди полученных тройных систем поверхностей нет тройно-ортогональных систем.

З а м е ч а н и е. Построение, связанное с ортогональной сетью и примененное нами для образования тройной системы поверхностей, представляет интерес само по себе, вне связи с тройной системой

В качестве примера решим задачу: существуют ли поверхности, на которых ортогональная сеть линии проектируется направлением, возникающим из ортогональной сети (способом, описанным выше для тройной системы), на прямые несобственной плоскости.

Отнесем поверхность в евклидовом пространстве к ортогональной сети и к проектирующему направлению, возникающему из нее. По смыслу задачи:

$$(\mathbf{e}_2 d\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^2); \quad (\mathbf{e}_1 d\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^1);$$

$$(\mathbf{e}_3 d\mathbf{e}_3 d^2\mathbf{e}_3) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^2); \quad (\mathbf{e}_3 d\mathbf{e}_3 d^2\mathbf{e}_3) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^2).$$

Для определения искомых поверхностей получим систему уравнений:

$$[\omega_1^2\omega^1] = 0; \quad [\omega_2^1\omega^2] = 0; \quad [\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] = 0;$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^1 + \omega_1^3\cos\varphi_1 + \omega_2^3\cos\varphi_2 = 0;$$

$$[\omega_3^2 - p\omega_3^1;\ \omega^2] = 0; \quad [dp + p(\omega_2^2 - \omega_1^1) + \omega_1^2;\ \omega^2] = 0;$$

$$[\omega_3^2 - q\omega_3^1;\ \omega^1] = 0; \quad [dq - q^2\omega_2^1 + q(\omega_2^2 - \omega_1^1);\ \omega^1] = 0.$$

Число характеристических форм 7; характеры $s_1 = 7$, $s_2 = 0$; число Картана $Q = 7$; произвол общего интегрального элемента $N = 7$. Система в инволюции и определяет искомый класс поверхностей с произволом в 7 функций одного аргумента.

III. Тройная система поверхностей, пересекающихся по линиям тени. Линии тени на поверхности суть линии прикосновения цилиндрических поверхностей, описанных около поверхности. Мы будем искать в аффинном пространстве тройные системы поверхностей, пересекающихся по линиям тени для соответственной (т. е. для одной из двух) поверхности. На поверхности $\omega^3 = 0$ имеем:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2; \quad d\mathbf{e} = (\omega_1^1 + \lambda\omega_2^1)\,\mathbf{e}_1 + (d\lambda + \omega_1^2 + \lambda\omega_2^2)\,\mathbf{e}_2 + (\omega_1^3 + \lambda\omega_2^3)\,\mathbf{e}_3.$$

Предположим, по условию, что линия ω^1 есть линия тени для поверхности $\omega^3 = 0$. Получим:

$$\omega_1^3 + \lambda\omega_2^3 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^2;\ \omega^3); \quad d\lambda - \lambda^2\omega_2^1 + \lambda(\omega_2^2 - \omega_1^1) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^2;\ \omega^3)$$

и аналогичные уравнения, если считать, что линия ω^2 есть линия тени для поверхности $\omega^1 = 0$ и линия ω^3 — на поверхности $\omega^2 = 0$.

Искомая тройная система поверхностей определится через:

$$[\omega_1^3 + \lambda\omega_2^3;\ \omega^2;\ \omega^3] = 0; \quad [d\lambda - \lambda^2\omega_2^1 + \lambda(\omega_2^2 - \omega_1^1);\ \omega^2;\ \omega^3] = 0;$$

$$[\omega_1^3\omega^1\omega^3] + [\omega_2^3\omega^2\omega^3] = 0;$$

$$[\omega_2^1 + \mu\omega_3^1;\ \omega^3;\ \omega^1] = 0; \quad [d\mu - \mu^2\omega_3^2 + \mu(\omega_3^3 - \omega_2^2);\ \omega^3;\ \omega^1] = 0;$$

$$[\omega_2^1\omega^2\omega^1] + [\omega_3^1\omega^3\omega^1] = 0;$$

$$[\omega_3^2 + \nu\omega_1^2;\ \omega^1;\ \omega^2] = 0; \quad [d\nu - \nu^2\omega_1^3 + \nu(\omega_1^1 - \omega_3^3);\ \omega^1;\ \omega^2] = 0;$$

$$[\omega_3^2\omega^3\omega^2] + [\omega_1^2\omega^1\omega^2] = 0.$$

Система замкнута и находится в инволюции, она определяет тройную систему поверхностей с произволом в 9 функций 2 аргументов.

Семейство линий $\omega^2 - \lambda\omega^1 = 0$ на поверхности $\omega^3 = 0$ сопряжено с семейством линий $\omega^2 = \omega^3 = 0$; линии $\omega^3 - \mu\omega^2 = 0$ на поверхности $\omega^1 = 0$ сопряжены с линиями $\omega^3 = \omega^1 = 0$; линии $\omega^1_2 - \nu\omega^3 = 0$ на поверхности $\omega^2 = 0$ — с линиями $\omega^1 = \omega^2 = 0$.

Есть ли среди найденных тройных систем тройно-сопряженные системы поверхностей? Вопрос приводится к пфаффовой системе:

$$\omega^2_1 = c_1\omega^1; \quad \omega^3_1 = c_2\omega^1; \quad \omega^1_2 = c_3\omega^2; \quad \omega^3_2 = c_4\omega^2; \quad \omega^1_3 = c_5\omega^3; \quad \omega^2_3 = c_6\omega^3.$$

Замыкая ее, получим систему в инволюции. Число характеристических форм равно 6; характеры $s_1 = 6$, $s_2 = 0$; число Картана $Q = 6$; произвол общего интегрального элемента $N = 6$.

Тройная система поверхностей определяется с произволом в 6 функций одного аргумента и характеризуется тем, что любые две поверхности разных семейств ее пересекаются по линии тени для каждой из них.

Томский государственный университет

Поступило
16 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Туганов, ДАН, 58, № 9 (1947). [2] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М. — Л., 1948.