Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Г. СИГАЛОВ

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МИНИМУМА ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 1 X 1951)

В работе автора (1) содержится общая теорема существования абсолютного минимума интегралов вида

$$\iint\limits_D F(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$$

в предположении, что допустимые поверхности лежат в ограниченной части пространства: $(x, y) \in D$, $|z| \leqslant z_0$. Если отбросить ограничение $|z| \leqslant z_0$, то проблема существования абсолютного минимума сводится указанной выше теоремой к более простой задаче: установить существование ограниченной минимизирующей последовательности.

В настоящей заметке дается условие существования ограниченной минимизирующей последовательности и связанная с ним теорема существования минимума в неограниченной области. Обозначения заметки (1) используются здесь без ссылок.

1. Пусть $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, — кусочно-линейная функция, $D_1 \subset D$. Положим $c_0 = \inf f(x, y)$, $(x, y) \in D_1$, $c_1 = \inf f(x, y)$, $(x, y) \in D_1'$.

Пусть $c_0 < c_1$ и $f(x_0, y_0) = c_0$, $(x_0, y_0) \in D_1'$.

Определим область G_c как компоненту множества $E(f < c)$, содержащую точку (x_0, y_0). Систему областей $\{G_c\}$, $c_0 < c < c_1$, назовем **монотонной системой областей меньших значений функции f в области D_1**. Аналогично определяется монотонная система областей бо́льших значений.

Назовем c неособым значением кусочно-линейной функции $f(x, y)$, $(x, y) \in D$, если при некоторой триангуляции $\Delta_1, \ldots, \Delta_s$ области D в каждом треугольнике которой функция f линейна, значение c не принимается ни в одной вершине триангуляции. Для каждого неособого значения c, $c_0 < c < c_1$, и для непрерывной функции $h(x, y)$, $(x, y) \in D$, определим интеграл $\int\limits_{G_c'} h\,dl$ как сумму линейных интегралов по всем отрезкам, составляющим границу G_c' области G_c.

Лемма. *Пусть $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, — кусочно-линейная функция; $F(x, y, z, p, q)$ определена и непрерывна при $(x, y) \in \overline{D}$, z, p, q произвольны; $\{G_c\}$ — монотонная система областей меньших значений функции f в области $D_1 \subset D$, $c_0 < c < c_1$, $I(c) = (f, G_c, F)$. Тогда*

$$I'(c) = \int\limits_{G_c'} \frac{F}{|\operatorname{grad} f|}\,dl \tag{A}$$

для всех неособых значений c функции f.

Доказательство элементарно.

Если $F = \varphi(z)\sqrt{p^2+q^2}$, то из (A) следует: $I'(c) = \varphi(c)\, l(c)$, где $l(c) = \int\limits_{\sigma_c} dl$.

2. Теорема 1. *Пусть функция $F(x, y, z, p, q)$ определена и непрерывна при $(x, y) \in \overline{D}$, где D — некоторая ограниченная область, и при произвольных z, p, q и для F справедлива теорема об аппроксимации* ((1), 9).

Пусть функция $\Psi(x, y)$ определена и непрерывна при $(x, y) \in D'$ и существует по крайней мере одна функция z_0 класса $L^{(1)}$, равная $\Psi(x, y)$ при $(x, y) \in D'$, для которой интеграл

$$(f, D, F) = \iint\limits_D F(x, y, f'_x, f'_y)\, dx\, dy$$

конечен и $\alpha \geqslant 1$.

Положим $\varphi(z) = \inf\{F/(p^2+q^2)^{1/2}\}$ *при* $p^2+q^2 \geqslant L^2$, $(x, y) \in \overline{D}$; $\psi(z) = \sup F(x, y, z, 0, 0)$, $(x, y) \in \overline{D}$.

Для того чтобы существовала ограниченная минимизирующая последовательность задачи на минимум интеграла (f, D, F) с граничными значениями $\Psi(x, y)$, достаточно, чтобы при некотором $L > 0$ выполнялось условие:

(*) *Для любого $N > 0$ найдутся такие $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, что из*

$$|a_j|,\ |b_j| > N_1 > \sup|\Psi(x, y)|,$$

$$\operatorname{sgn} a_j = \operatorname{sgn} b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\quad \sum_{j=1}^{n} |b_j - a_j| > N,$$

(a_j, b_j) попарно не пересекаются, следует

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{a_j}^{b_j} \varphi \cdot \psi^{-1/\alpha}\, dz > N.$$

3. Для доказательства теоремы 1 определяем минимизирующую последовательность кусочно-линейных функций $\{\overline{z}_n\}$ так, чтобы для любой основной области G_c функции $\overline{z}_n$ выполнялось

$$(\overline{z}_n, G_c, F) \leqslant (c, G_c, F)\ ^*. \tag{1}$$

Пусть G_c есть компонента множества $E(\overline{z}_n < c)$,

$$c_0 < c < c_1,\quad c_0 = \inf \overline{z}_n,\ (x, y) \in D_n,\quad c_1 = \inf \overline{z}_n,\ (x, y) \in D'_n.$$

Если $p = \partial\overline{z}_n/\partial x$, $q = \partial\overline{z}_n/\partial y$, то из определения $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и из (1) получаем

$$\iint\limits_{G_c} (p^2+q^2)^{1/2}\, \varphi(\overline{z}_n)\, dx\, dy - L \iint\limits_{G_c} \varphi(\overline{z}_n)\, dx\, dy \leqslant \psi(c)\, \mu(G_c). \tag{2}$$

Положим $g(c) = \iint\limits_{G_c} \sqrt{p^2+q^2}\, dx\, dy$, $\mu(c) = \mu(G_c)$. Так как $\overline{z}_n(x, y)$ — кусочно-линейная функция, то интервал (c_0, c_1) можно разбить на конеч-

* Построение $\{\overline{z}_n\}$ определяется аналогично (2), гл. IV.

ное число попарно неперекрывающихся интервалов $(a_1, b_1), \ldots, (a_s, b_s)$, каждый из которых удовлетворяет одному из следующих условий: а) $\sqrt{\pi\mu(c)} \leqslant L\mu'(c)$ для всех неособых c; б) $\sqrt{\pi\mu(c)} \geqslant L\mu'(c)$.

Интегрируя неравенство а) в каждом интервале, состоящем из неособых точек, получаем, что сумма длин интервалов, удовлетворяющих условию а), не превосходит $2L\pi^{-1/2}\mu(D)$.

Пусть теперь (a_i, b_i) удовлетворяет условию б). Обозначая левую часть неравенства (2) через $\chi(c)$, получаем

$$\chi'(c) = \varphi(c)\, l(c) - L\varphi(c)\,\mu'(c) \geqslant \varphi(c)\sqrt{\pi\mu(c)}.$$

Отсюда и из (2) получаем

$$\chi'(c) \geqslant \sqrt{\pi}\,\varphi(c)\,\chi(c)^{1/2}\,\varphi(c)^{-1/2}.$$

Интегрируя последнее неравенство в каждом интервале, состоящем из неособых точек, получаем оценку для суммы длин интервалов, удовлетворяющих условию б).

Таким образом, доказано, что последовательность $\{\overline{z}_n\}$ ограничена снизу. Точно так же доказывается существование верхней границы.

Из теоремы 1 и из теоремы 2 (1) вытекает следующая теорема:

4. Теорема 2. *Пусть F и $\Psi(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы* 1 *настоящей заметки и, кроме того, удовлетворяются условия* 1), 2а) *теоремы* 1 *заметки* (1).

Тогда существует функция, дающая интегралу (f, D, F) абсолютный минимум в классе всех допустимых функций.

5. Пример 1. Пусть $F = f(x, y, p, q) + g(x, y, z)$ и а) $f \geqslant m(p^2+q^2)^{\alpha/2}$, $p^2 + q^2 \geqslant L^2$, $(x, y) \in \overline{D}$; б) $m_1|z|^\gamma \leqslant g \leqslant M|z|^\gamma$, $(x, y) \in \overline{D}$, $|z| \geqslant z_0$, $\alpha > 1$; $m, m_1, M_1 > 0$; f и g непрерывны. Из условий а), б) следует, что функция F ограничена снизу. Прибавляя к F положительную постоянную, получаем функцию $F_1 = f_1 + g$, которая удовлетворяет тем же условиям а), б) и, сверх того, $F \geqslant 0$

Имеем

$$f_1 + g \geqslant m_2(p^2 + q^2)^{1/2} g^{1/\beta}, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1, \quad p^2 + q^2 \geqslant L^2.$$

Следовательно, $\varphi(z) \geqslant m_3|z|^{\gamma/\beta}$, $|z| \geqslant z_0$. Отсюда получаем, что условие (*) выполняется, если $\gamma/\beta - \gamma/2 \geqslant -1$. При $\alpha = 2$ условие (*) выполняется для любого γ.

6. Пример 2. Пусть $F = f(p, q)\, g(z) \geqslant 0, \alpha \geqslant 1$, $f(p, q) \geqslant m(p^2 + q^2)^{\alpha/2}$, $p^2 + q^2 \geqslant L^2$, $m > 0$; $m|z|^\gamma \leqslant g(z) \leqslant M|z|^\gamma$, $|z| \geqslant z_0$.

Условие (*) выполняется, если $\gamma \geqslant 0$. Если $\alpha > 1$ и выполняется условие квази-регулярности, то выполняются все условия теоремы 2 *.

Поступило
27 IX 1951

---

*В заметке автора (1) вместо $(f, G)_\alpha = \iint\limits_G (1 + p^2 + q^2)^{\alpha/2}\, dx\, dy$ ошибочно поставлено $(f, G)_\alpha = \iint\limits_G (p^2 + q^2)^{\alpha/2}\, dx\, dy$ (п. 4). Такое определение $(f, G)_\alpha$ не нарушает основных теорем и, в частности, критерия компактности (теорема 3), но требует изменения некоторых деталей доказательства. Укажем более удобную для применения форму теоремы 3 (2):

Теорема. *Пусть последовательность кусочно-линейных функций $f_1, f_2, \ldots$ удовлетворяет всем условиям теоремы* 3 (1), *кроме условия* 4), *и вместо него выполнено следующее условие:*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Сигалов, ДАН, **73**, № 5 (1950). [2] А. Г. Сигалов, Усп. матем. наук, № 2 (1951).

4') *Существует число* $q > 0$ *такое, что*

$$\iint\limits_{G} |\operatorname{grad} f_n|\, dx\, dy \leqslant q\mu(G)$$

для любой основной области G *функции* f_n, $n = 1, 2, \ldots$ *Тогда функции* $f_n(x, y)$, $(x, y) \in D_n$, *равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.*

Для доказательства рассмотрим область $G \in D_n$ и монотонную систему областей меньших значений $\{G_c\}$ функции f_n в области G, $c_0 < c < c_1$.

Положим $g(G) = \iint\limits_{G} |\operatorname{grad} f_n|\, dx\, dy$, $g(c) = g(G_c)$. Пользуясь равенством $g'(c) = \int\limits_{G'_c} dl$ и изопериметрическим неравенством, получаем

$$\int\limits_{c_0}^{c_1} \frac{dc}{Q(c)} \leqslant 2\sqrt{\pi g(c)}.$$

Так как $Q(c) \leqslant q$, то отсюда следует $c_1 - c_0 = \lambda_-\{f_n, G\} \leqslant 2q\sqrt{\pi\mu(G)}$. То же неравенство справедливо для областей меньших значений. Отсюда следует основное неравенство

$$\lambda\ f_n, G\} \leqslant 2q\sqrt{\pi\mu(G)}, \quad G \subset D_n.$$

Из этого неравенства и из существования $\varepsilon - \delta$-решеток (см. [1], п. 7) можно получить доказательство приведенной выше теоремы проще, чем в [1].