Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР Н. Н. БОГОЛЮБОВ

УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. В соответствии с замечанием, приведенным в нашей предыдущей заметке [1], рассмотрим уравнение в вариациях:

$$i\hbar\,\delta\Phi(g) = \int Q(x, g)\,\delta g(x)\,dx\,\Phi(g), \tag{1}$$

определяющее волновой вектор $\Phi(g)$ как функционал от вещественной функции $g(x)$. Если мы здесь возьмем в качестве класса допустимых функций класс разрывных функций типа:

$$g_\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x < \sigma, \\ 0, & x > \sigma, \end{cases} \tag{2}$$

где σ — временно-подобные поверхности, то придем к обычным уравнениям теории Томонага — Швингера. Переход к сглаженным функциям физически соответствует учету «размытости» моментов времени.

Подобно тому как в теории Томонага — Швингера вполне можно было ограничиться классом плоских поверхностей $(x\cdot\xi) = \tau$, в нашей теории мы можем взять в качестве класса допустимых функций четырехпараметрическое семейство вида:

$$g(x) = f(\tau - x\cdot\xi), \tag{2'}$$

где $f(\tau)$ представляет сглаженную функцию, отличающуюся от известной разрывной функции $\theta(\tau)$ в окрестности значения $\tau = 0$ с длиной порядка некоторой величины Δt, характеризующей степень размытости моментов времени.

Заметим, что идея введения «размытых поверхностей» с помощью вещественных функций $g(x)$ была высказана Штюкельбергом [2], который в своей работе пытался построить аппарат для ее проведения в квантовой теории поля. Для определения $\Phi(g)$ он пользовался „интегральным“ соотношением:

$$\Phi(g_2) = S(g_2 - g_1)\,\Phi(g_1), \tag{3}$$

в котором $S(F)$ представляет матрицу рассеяния обычной теории, взятую для плотности гамильтониана $H(x)\,F(x)$.

Это соотношение, однако, неправильно. В самом деле, для ковариантности теории и возможности рассмотрения в ней временной эволюции системы необходимо, чтобы класс допустимых функций вместе с какой-либо $g(x)$ включал и все другие функции, образованные из нее с помощью лоренцовских преобразований. В этом смысле класс (2) с фиксированной $f(\tau)$ является минимальным.

Однако уравнение (3) не может повсюду выполняться даже в таком минимальном классе допустимых функций и приводит к внутреннему противоречию, так как

$$S(g_1 - g_2)\,S(g_2 - g_3) \neq S(g_1 - g_3).$$

Поэтому мы предлагаем подчинить $\Phi(g)$ уравнению в вариациях типа (1).

В этом уравнении оператор $Q(x;g)$ выбираем в виде разложения:

$$Q(x;g) = H(x) + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!} \int Q_n(x, x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1) \ldots g(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{4}$$

Для обеспечения эрмитовости $Q(x;g)$ мы должны наложить условия:

$$\overset{+}{H}(x) = H(x); \quad \overset{+}{Q}_n = Q_n. \tag{5}$$

Операторы $Q_n(x, x_1, \ldots, x_n)$ без ограничения общности можем считать симметричными функциями точек $x_1, \ldots, x_n$.

Для обеспечения ковариантности следует наложить условия:

$$H(Lx) = \overset{+}{U}_L H(x) U_L; \quad Q_n(Lx, \ldots, Lx_n) = \overset{+}{U}_L Q_n(x, \ldots, x_n) U_L, \tag{6}$$

при выполнении которых

$$Q(Lx, g) = \overset{+}{U}_L Q(x, Lg) U_L; \quad Lg = g(Lx). \tag{7}$$

Наконец, необходимо обеспечить разрешимость рассматриваемых уравнений (1).

$$\iint \left\{ \frac{\delta Q(y;g)}{\delta g_x} - \frac{\delta Q(x;g)}{\delta g_y} + (i\hbar)^{-1} [Q(x;g), Q(y;g)] \right\} \delta g(x)\, \delta g(y)\, dx\, dy = 0,$$

раскрывая которое, найдем:

$$i\hbar \{Q_{n+1}(y, x, x_1, \ldots, x_n) - Q_{n+1}(x, y, x_1, \ldots, x_n)\} =$$

$$= \sum_{(0\leqslant k\leqslant n)} \sum \left(\frac{x_1, \ldots, x_k}{x_{k+1}, \ldots, x_n} \right) [Q_k(x, x_1, \ldots, x_k); Q_{n-k}(y, x_{k+1}, \ldots, x_n)], \tag{8}$$

где $\sum \left(\frac{x_1, \ldots, x_k}{x_{k+1}, \ldots, x_n} \right)$ представляет операцию симметризации по отношению к разбиениям совокупности точек $(x_1, \ldots, x_n)$ на две совокупности $(x_1', \ldots, x_k'), (x_{k+1}', \ldots, x_n')$ и состоит из суммы $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ соответствующих перестановок.

При выполнении наложенных условий уравнение (1) обладает законами сохранения энергии — импульса и момента количества движения, которые выражаются в следующей форме:

$$\delta(\Phi^*(g) P_\alpha(g) \Phi(g)) = 0; \quad \delta(\Phi^*(g) M_{\alpha,\beta}(g) \Phi(g)) = 0, \tag{9}$$

где

$$P_\alpha(g) = P_\alpha^0 - \int \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} Q(x;g)\, dx;$$

$$M_{\alpha,\beta}(g) = M_{\alpha,\beta}^0 - \int \left(x_\beta \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} - x_\alpha \frac{\partial g}{\partial x_\beta} \right) Q(x;g)\, dx. \tag{10}$$

Таким образом при изменении $g(x)$ в принятом классе функций средние значения P и M остаются неизменными. Неизменными будут, следовательно, и их собственные значения.

Аналогичное замечание относится также и к матрице рассеяния.

2. Как видно, в нашей теории роль одной плотности гамильтониана $H(x)$ играет последовательность операторов:

$$H(x), \quad Q_2(x_1, x_2), \ldots, \tag{11}$$

подчиненных ранее сформулированным условиям.

Для обеспечения приближенной локализуемости и установления связи с обычной теорией укажем один возможный прием построения этих операторов.

Будем исходить из какой-либо известной плотности гамильтониана $H(x)$, для которой $[H(x), H(x')] = 0 \quad (x - x')^2 < 0$, и положим:

$$Q_n(x, x_1, \ldots, x_n) = Q(H(x)H(x_1)\ldots H(x_n)), \tag{12}$$

где, вообще:

$$Q(A(x), A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)) =$$
$$= \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \sum (x_1, \ldots, x_n)\, \theta(t_n - t_{n-1}) \ldots \theta(t_1 - t)\, [A(x), A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)]. \tag{13}$$

Символ $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает здесь симметризацию по отношению к точкам $x_1, \ldots, x_n$ и состоит из суммы $n!$ перестановок этих точек.

Определенные таким образом операторы Q_n формально удовлетворяют всем ранее наложенным условиям. Кроме того, они обладают еще следующим важным свойством:

$$Q_n = 0, \tag{14}$$

если хотя бы для одного k $(x - x_k)^2 < 0$, или $x^0 - x_k^0 > |\overrightarrow{x - x_k}|$.

Данное определение, однако, не полно. В самом деле, оператор (12) должен иметь смысл не для отдельных точек $x, x_1, \ldots, x_n$, а в проинтегрированной форме

$$\int Q(H(x)H(x_1)\ldots H(x_n))\, F(x, x_1, \ldots, x_n)\, dx\, dx_1 \ldots dx_n \tag{15}$$

для определенного класса достаточно регулярных функций, например для $F = g_0(x)\, g(x_1)\ldots g(x_n)$. Наложенные условия также должны выполняться именно в проинтегрированной форме.

Представим оператор (15) в нормальном виде, переведя все операторы уничтожения $a_{\nu_1} a_{\nu_2} \ldots$ частиц с импульсами $\nu_1, \nu_2 \ldots$ направо, а операторы порождения $\overset{+}{a}_{\nu_1'} \overset{+}{a}_{\nu_2'} \ldots$ — налево. Тогда коэффициенты при них должны быть линейными функционалами от F.

Однако, если мы раскроем соответствующие коэффициенты при «плотностях» Q, то заметим, что они включают в себя произведения сингулярных функций $D_F, D, \ldots$ с сильными особенностями на световом конусе. Правило интегрирования каждой отдельной из этих сингулярных функций установлено лишь для ее интеграции с достаточно регулярной функцией, и «интеграл» от их произведений нуждается в специальном определении. Непосредственное применение правил интеграции отдельных сингулярных функций $D_F, D, \ldots$ с регулярными функциями для их произведений с совпадающими особенностями приводит к расходимостям, давно известным под именем «ультрафиолетовой катастрофы».

Возникает, следовательно, проблема определения коэффициентов при $\overset{+}{a}_{\nu_1'} \overset{+}{a}_{\nu_2'} \ldots a_{\nu_1} a_{\nu_2} \ldots$ у операторов (15) как линейных функционалов F таких, что все соотношения (5), (6), (8), (14) выполняются в проинтегрированной форме.

Эта проблема решается следующим путем. Прежде всего непосредственно определяются указанные функционалы для специального класса функций, для которых F вместе со всеми частными производными до некоторого порядка обращается в нуль при совпадении любой пары точек $x, x_1, \ldots, x_n$.

Затем производится расширение этих линейных функционалов на класс произвольных регулярных функций. Эта операция, хотя она и проводится с учетом (5), (6), (8), (14), уже неоднозначна. В некоторых случаях, впрочем, эта неоднозначность соответствует произволу в ренормировке масс частиц, констант связи и единиц измерения полей. Определив так или иначе интегралы (15), мы можем уже пользоваться нашими уравнениями (1) для решения конкретных задач.

Обратим сейчас внимание на свойство (14). Рассмотрим функции $g(x)$, отличающиеся от $g_\sigma(x)$ из (2) лишь в некотором слое, с временной длительностью порядка Δt, окружающем пространственно-подобную поверхность σ, и заметим, что тогда, в силу (14), интеграция в (4) фактически ограничивается областями, для которых

$$\overrightarrow{|x_k - x|} \leqslant x_k^0 - x^0 \sim \Delta t,$$

ввиду чего $Q(x; g)$ зависит лишь от состояния полей в окрестности точек x — окрестности с пространственной и временной длиной порядка Δt. Таким образом, свойство (14) обеспечивает приближенную локализуемость в нашей теории.

Скажем в заключение несколько слов по поводу классической задачи построения последовательной квантовой электродинамики.

В нашей теории мы можем исходить из плотности гамильтониана вида $j(x) \cdot A(x)$, где $A(x)$ — вектор-потенциал электромагнитного поля с обычными условиями коммутации, $j(x)$ — тривиально коммутирующий с $A(x)$ оператор тока.

Для обеспечения градиентной инвариантности расширение функционалов, о котором мы говорили выше, должно проводиться с учетом условий

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} Q\left(j_\nu(x) \cdot H(x_1) \ldots H(x_n)\right) = 0, \tag{16}$$

представленных для этого, разумеется, в проинтегрированной форме.

Если исходить из квантования электромагнитного поля по Гупта—Блейлеру ([3]), то дополнительные условия мы должны представить в виде:

$$\left\{\sum_\mu \frac{\partial \overset{+}{A}_\mu(x)}{\partial x_\mu} - \int \overset{+}{D}(x - x') \left(\frac{\partial g(x')}{\partial x'} \cdot j(x', g)\right) dx'\right\} \Phi(g) = 0, \tag{17}$$

где

$$j(x; g) = j(x) + \sum_{(n \geqslant 1)} \frac{1}{n!} \int Q\left(j(x) \cdot H(x_1) \ldots H(x_n)\right) g(x_1) \ldots g(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n; \tag{18}$$

$\overset{+}{A}(x)$, $\overset{+}{D}(x)$ — положительно-частотные части $A(x)$ и инвариантной D-функции. При бесконечно малом градиентном преобразовании

$$A_\nu(x) \to A_\nu(x) + \delta_\nu \frac{\partial \delta\Omega}{\partial x_\nu}; \quad \Box \delta\Omega = 0,$$

соответствующее бесконечно малое преобразование $\Phi(g)$, восстанавливающее первоначальную форму уравнений, будет

$$\Phi(g) \to \left\{1 + \frac{1}{i\hbar} \int \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot j(x, g)\right) \delta\Omega(x)\, dx\right\} \Phi(g). \tag{19}$$

Поступило
14 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Боголюбов, ДАН, **81**, № 6 (1951). [2] E. Stueckelberg, Phys. Rev., **81**, 130 (1951). [3] K. Bleuler, Helv. Phys. Acta, **23**, 567 (1951).