Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

И. П. НАТАНСОН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВОЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 15 X 1951)

Пусть $\Phi_n(u)$ и $\Psi_m(v)$ — две непрерывные, положительные, четные, 2π-периодические функции, для которых

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_m(v)\,dv = 1. \tag{1}$$

Пусть, далее, величины

$$\lambda_n = \int_0^{\pi} u\,\Phi_n(u)\,du, \quad \mu_m = \int_0^{\pi} v\Psi_m(v)\,dv \tag{2}$$

стремятся к нулю с возрастанием n и m.

Каждой функции $f(u, v)$, заданной и непрерывной на всей плоскости и имеющей по каждому из аргументов период 2π, соотнесем интеграл

$$f_{n,m}(x, y) = \iint_Q f(u, v)\,\Phi_n(u-x)\,\Psi_m(v-y)\,du\,dv, \tag{3}$$

в котором Q есть квадрат $(-\pi \leqslant u \leqslant \pi,\ -\pi \leqslant v \leqslant \pi)$. Теория двойных тригонометрических рядов доставляет много примеров таких интегралов.

Теорема 1. *Пусть*

$$\omega(\lambda, \mu) = \sup_S |f(u, v) - f(u', v')|,$$

где S есть множество пар таких точек (u, v) и (u', v'), для которых $|u-u'| \leqslant \lambda$, $|v-v'| \leqslant \mu$. Тогда

$$|f_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leqslant 5\omega(\lambda_n, \mu_m). \tag{4}$$

В самом деле,

$$f_{n,m}(x, y) - f(x, y) = \iint_Q \{f(x+u, y+v) - f(x, y)\}\Phi_n(u)\,\Psi_m(v)\,du\,dv.$$

Но

$$|f(x+u, y+v) - f(x, y)| \leqslant \omega(|u|, |v|).$$

С другой стороны, для натуральных p и q нетрудно доказать неравенство

$$\omega(p\lambda, q\mu) \leqslant \omega(\lambda, \mu)\max(p, q),$$

опираясь на которое легко установить, что при любых неотрицательных a и b будет

$$\omega(a\lambda,\ b\mu) \leqslant (1+a+b)\,\omega(\lambda,\ \mu).$$

Стало быть,

$$|f_{n,m}(x,y)-f(x,y)| \leqslant \omega(\lambda_n,\ \mu_m) \iint\limits_Q \left(1+\frac{|u|}{\lambda_n}+\frac{|v|}{\mu_m}\right)\Phi_n(u)\,\Psi_m(v)\,du\,dv,$$

откуда, в связи с (1) и (2), и вытекает (4).

Введем обозначения

$$\Lambda_n = \int\limits_0^\pi u^2\Phi_n(u)\,du, \qquad \mathrm{M}_m = \int\limits_0^\pi v^2\Psi_m(v)\,v\,dv$$

и допустим, что для любого $\sigma>0$ (и $<\pi$) будет

$$\int\limits_\sigma^\pi \Phi_n(u)\,du = o(\Lambda_n), \qquad \int\limits_\sigma^\pi \Psi_m(v)\,dv = o(\mathrm{M}_m). \tag{5}$$

В таком случае имеет место

Теорема 2. *Если $f(u,v)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то справедлива асимптотическая формула*

$$f_{n,m}(x,y) = f(x,y) + \frac{\Lambda_n}{2}f''_{uu}(x,y) + \frac{\mathrm{M}_m}{2}f''_{vv}(x,y) + o(\Lambda_n+\mathrm{M}_m). \tag{6}$$

Для доказательства заметим, что по формуле Тэйлора будет

$$f(x+u,\ y+v) = f(x,y) + f'_u(x,y)\,u + f'_v(x,y)\,v +$$
$$+\frac{1}{2}\left[f''_{uu}(\xi,\ \eta)\,u^2 + 2f_{uv}(\xi,\ \eta)\,uv + f''_{vv}(\xi,\ \eta)\,v^2\right].$$

Подставляя это выражение в равенство

$$f_{n,m}(x,\ y) = \iint\limits_Q f(x+u,\ y+v)\,\Phi_n(u)\,\Psi_m(v)\,du\,dv$$

и замечая, что

$$\iint\limits_Q u\Phi_n(u)\,\Psi_m(v)\,du\,dv = \iint\limits_Q v\Phi_n(u)\,\Psi_m(v)\,du\,dv = 0,$$

находим

$$f_{n,m}(x,\ y) = f(x,\ y) +$$
$$+\frac{1}{2}\iint\limits_Q \left[f''_{uu}(\xi,\ \eta)\,u^2 + 2f''_{uv}(\xi,\ \eta)\,uv + f''_{vv}(\xi,\ \eta)\,v^2\right]\Phi_n(u)\,\Psi_m(v)\,du\,dv.$$

Но $\quad f''_{uu}(\xi,\eta) = f''_{uu}(x,y) + \alpha(u,v), \qquad f''_{uv}(\xi,\eta) = f''_{uv}(x,y) + \beta(u,v),$

$f''_{vv}(\xi,\ \eta) = f''_{vv}(x,\ y) + \gamma(u,\ v)$, где α, β, γ суть некоторые ограниченные функции, стремящиеся к нулю, когда u и v стремятся к нулю. Замечая, что

$$\iint\limits_Q uv\Phi_n(u)\,\Psi_m(v)\,du\,dv = 0,$$

получаем

$$f_{n,m}(x,\ y) = f(x,\ y) + \frac{\Lambda_n}{2}f''_{uu}(x,\ y) + \frac{\mathrm{M}_m}{2}f''_{vv}(x,\ y) + \rho_{n,m},$$

где

$$|\rho_{n,m}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \iint_Q \{|\alpha(u,\ v)|\, u^2 + 2|\beta(u,\ v)|\ |uv| + |\gamma(u,\ v)|\, v^2\}\, \Phi_n(u)\, \Psi_m(v)\, du\, dv.$$

Так как $2|uv| \leqslant u^2 + v^2$, то и подавно

$$|\rho_{n,m}| \leqslant \frac{1}{2} \iint_Q \{\alpha_1(u,\ v)\, u^2 + \gamma_1(u,\ v)\, v^2\}\, \Phi_n(u)\, \Psi_m(v)\, du\, dv,$$

где положено для краткости $\alpha_1 = |\alpha| + |\beta|$, $\gamma_1 = |\beta| + |\gamma|$.

Достаточно оценить интеграл

$$\tau_{n,m} = \iint_Q \alpha_1(u,\ v)\, u^2 \Phi_n(u)\, \Psi_m(v)\, du\, dv.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и пусть $\sigma > 0$ таково, что при $|u| \leqslant \sigma$, $|v| \leqslant \sigma$ будет $\alpha_1 < \varepsilon$. Если q есть квадрат $(-\sigma \leqslant u \leqslant \sigma,\ -\sigma \leqslant v \leqslant \sigma)$, то

$$\iint_q \alpha_1(u,\ v)\, u^2 \Phi_n(u)\, \Psi_m(v)\, du\, dv < 2\varepsilon \Lambda_n.$$

Значит, обозначая через A верхнюю границу α_1, получим

$$\tau_{n,m} < 2\varepsilon\Lambda_n + A \iint_{Q-q} u^2 \Phi_n(u)\, \Psi_m(v)\, du\, dv.$$

Область $Q - q$ расположена в четырех координатных углах. Нетрудно видеть, что интеграл, стоящий в последнем неравенстве, можно заменить учетверенным интегралом, распространенным на ту часть $Q - q$, которая лежит в первом координатном угле. Отсюда, после замены множителя u^2 на π^2, следует, что

$$\tau_{n,m} < 2\varepsilon\Lambda_n + 4A\pi^2 \left\{ \int_\sigma^\pi \Phi_n(u) \left(\int_\sigma^\pi \Psi_m(v)\, dv \right) du + \right.$$

$$\left. + \int_\sigma^\pi \Phi_n(u) \left(\int_0^\sigma \Psi_m(v)\, dv \right) du + \int_0^\sigma \Phi_n(u) \left(\int_\sigma^\pi \Psi_m(v)\, dv \right) du \right\}.$$

Согласно (5) первый и второй интегралы, стоящие в фигурных скобках, (равномерно относительно m) суть $o(\Lambda_n)$, а третий (равномерно относительно n) есть $o(\mathrm{M}_m)$. Поэтому для достаточно больших n и m окажется

$$\tau_{n,m} < 3\varepsilon(\Lambda_n + \mathrm{M}_m).$$

Теорема доказана.

Поступило
15 X 1951