Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Г. НЕВЗГЛЯДОВ

О КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ НОВОГО МЕТОДА В ДИНАМИКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 15 XI 1951)

§ 1. В работе автора [1], излагающей новый метод в динамике вязкой жидкости, краевые условия ставились в виде требования гладкого сшивания $\mathbf{u}_0+\mathbf{v}$ — общего решения уравнений движения нового метода на контуре C с полиномами (4,4), (4,5) [1], а именно:

$$\frac{u_\varphi}{u_0}=\frac{\psi}{\lambda}q_1(\varphi)+\left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^2 q_2(\varphi)+\ldots+\left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^n q_n(\varphi);$$
$$(0\leqslant\psi\leqslant\lambda,\ \varphi_1<\varphi<\varphi_2)\quad(1,1)$$
$$\frac{u_\psi}{u_0}=-\lambda\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^2\frac{dq_1}{d\varphi}+\ldots+\frac{1}{n+1}\left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^{n+1}\frac{dq_n}{d\varphi}\right].$$

Краевые условия были формулированы посредством апелляции к качественным результатам опыта в виде уравнений (4,6), (4,7) [1]. При этом вопрос о степени гладкости сшивания (о порядке производных, которые приравниваются на контуре C), связанный с числом функций q_n, был оставлен открытым. Этот вопрос может быть решен, если потребовать, чтобы функции (1,1) были решениями уравнений Навье — Стокса.

§ 2. Ставим краевые условия в виде требования гладкого сшивания $\mathbf{u}_0+\mathbf{v}$ и давления p на контуре C с решением уравнения Навье — Стокса внутри пограничного слоя, удовлетворяющим условию прилипания жидкости к твердому телу.

Для простоты, рассмотрим сначала обтекание пластинки (обозначение см. [2]). Ищем решение уравнений Навье — Стокса вблизи пластинки при больших Re в виде рядов (1,1), т. е. не ограничиваем числа функций q_n. Аналогичное разложение берем для давления P:

$$P=P_0(x)+\frac{y}{\lambda}P_1(x)+\ldots+\left(\frac{y}{\lambda}\right)^n P_n(x)+\ldots\quad(0\leqslant y\leqslant\lambda;\ 0<x<1).\quad(2,1)$$

Выражения (1,1) удовлетворяют уравнению несжимаемости и условию прилипания к пластинке. Подставляя (1,1) и (2,1) в уравнения Навье — Стокса и пренебрегая $\partial^2\mathbf{u}/\partial x^2$ сравнительно с $\partial^2\mathbf{u}/\partial y^2$, получим следующие рекурентные формулы:

$$P_0=\frac{1}{\varkappa}\int q_2dx+\text{const};\quad P_i=\frac{-1}{2\alpha}q_i'\ (i=1,\,2,\,3);\quad \alpha\equiv\frac{1}{2}\text{Re};$$
$$(2,2)$$
$$P_{n+1}=-\frac{1}{2\alpha}q_{n+1}'+\frac{\varkappa}{(n+1)\,\alpha}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{q_kq_{n-k-1}''-q_k'q_{n-k-1}'}{n-k}\quad(n=3,\ 4,\ldots);$$

$$q_3 = -\frac{\varkappa}{6\alpha} q_1''; \quad q_{n+2} = \frac{2\varkappa}{(n+1)(n+2)} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+1-2k}{n+1-k} q_k q'_{n-k} + P'_n \right\} \quad (2,3)$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Здесь $\varkappa \equiv \alpha\lambda^2$. Таким образом, все функции P_n и q_n выражаются через q_1 и q_2, которые остаются произвольными. Для больших чисел Re, пренебрегая членами порядка α^{-1}, запишем решение уравнений Навье — Стокса так:

$$u_x = \frac{y}{\lambda} q_1 + \left(\frac{y}{\lambda}\right)^2 q_2 + f;$$

$$f \equiv \frac{\varkappa}{12} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^4 \left[q_1 q_1' + \frac{4}{5}\left(\frac{y}{\lambda}\right) q_1 q_2' + \frac{4}{15}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2 q_2 q_2' \right] + \ldots; \quad (2,4)$$

$$u_y = -\lambda \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^2 q_1' + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^3 q_2' + \frac{1}{\lambda}\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x} dy \right\}; \quad (2,5)$$

$$P = \mathrm{const} + \frac{1}{\varkappa} \int q_2 dx. \quad (2,6)$$

Мы получили выражения для скорости u_x, u_y в виде разложения по степеням параметра $\varkappa$, которым можно распорядиться (при этом λ получит определенные значения для каждого числа Re). Два краевых условия (для v_x и v_y) получим, приравнивая

$$1 + v_x = u_x; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad v_y = u_y; \quad p = P \quad (y = \lambda;\ 0 < x < 1); \quad (2,7)$$

при этом первые и вторые производные от v_y по y будут равны соответственным производным от u_y автоматически при условии $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, это будет следствием первых двух уравнений (2,7).

Из (2,7) можно получить краевые условия, исключив q_1 и q_2. Это исключение надо произвести последовательными приближениями; в самом деле, из опыта известно, что в тонком пограничном слое профиль скорости почти линеен, т. е. в ряду (2,4) первый член является главным, и остальные можно рассматривать как поправочные. Сохраняя в (2,4) два первых члена, получим из (2,7) краевые условия вида:

$$v_x - \lambda \frac{\partial v_x}{\partial y} = -1 - \varkappa \frac{\partial p}{\partial x} \quad (y = \lambda;\ 0 < x < 1); \quad (2,8)$$

$$v_y + \frac{1}{2} \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} - \lambda \frac{\varkappa}{6} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (y = \lambda;\ 0 < x < 1). \quad (2,9)$$

Эти условия являются уточнением условий (2,1), (2,2) [2]. При больших Re $\partial p / \partial x$ порядка Re^{-1} (см. § 4), поэтому в первом приближении можно в (2,8) и (2,9) отбросить производные от p, после чего (2,8) формально совпадает с известным условием Навье, учитывающим скольжение: $u = \zeta\, \partial u / \partial y$ (ибо $u = 1 + v_x$), только на месте коэффициента скольжения ζ стоит параметр λ. Отметим еще, что так как $(v_y)_{y=\lambda}$ имеет порядок величины λv_x, то условие (2,9) имеет вид: $\lambda \cdot$(выражение порядка $v_x) = 0$, и его можно считать приближенно выполненным, если v_x порядка 1.

Учитывая в (2,4) члены, линейно содержащие q_1' посредством q_1 и q_2, найденных в первом приближении, получим вместо (2,8) уточненное краевое условие вида:

$$v_x - \lambda \frac{\partial v_x}{\partial y} = -1 - \varkappa \frac{\partial p}{\partial x} + \varphi(x); \tag{2,10}$$

$$\varphi(x) \equiv -\frac{\varkappa}{4} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\varkappa^2}{60} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (y = \lambda;\ 0 < x < 1).$$

§ 3. Уравнения Навье — Стокса в координатах φ и ψ имеют довольно громоздкий вид, который может быть упрощен внутри пограничного слоя, если сделать пренебрежения, основанные на следующих оценках: $u_\varphi \sim 1$; $u_\psi \sim \lambda$, дифференцирование $\mathbf{u}$ по φ вообще не меняет порядка, а дифференцирование по ψ увеличивает в λ^{-1} раз. u_0 можно приближенно принять зависящим только от φ. Ищем решение уравнений Навье — Стокса в виде рядов (1,1) (т. е. не ограничиваем числа q_n), и для P берем разложение вида (2,1), в котором x, y заменены на φ, ψ. Для больших чисел Re, отбрасывая члены порядка Re^{-1}, получаем:

$$q_{n+2} = \frac{2\varkappa}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{n+1-2k}{n+1-k} q_k q'_{n-k} + \frac{1}{u_0} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} q_k q_{n-k} \right\} \quad (n=1, 2, \ldots), \tag{3,1}$$

причем функции q_1 и q_2 остаются произвольными. Давление и поле скоростей получаем в виде:

$$P = \mathrm{const} + \frac{1}{\varkappa} \int u_0^2 q_2 \, d\varphi + f_1; \quad f_1 \equiv -\frac{u_0^2}{\mathrm{Re}} \frac{\psi}{\lambda} \left(q_1' + \frac{\psi}{\lambda} q_2' \right) + \ldots \tag{3,2}$$

$$\frac{u_\varphi}{u_0} = \frac{\psi}{\lambda} q_1 + \left(\frac{\psi}{\lambda} \right)^2 q_2 + f. \tag{3,3}$$

Здесь f — это ряд, аналогичный ряду в формуле (2,4), только еще содержащий производные от u_0 по φ; эти производные имеют порядок величины малого параметра, определяющего толщину профиля, и мы будем пренебрегать их степенями выше первой. Быстрая сходимость ряда f обеспечивается плавностью изменения функции $q_1(\varphi)$.

Далее, действуя как в § 2, мы получим из уравнений, соответствующих уравнениям (2,7), краевое условие в первом приближении, для больших чисел Re, в следующем виде:

$$\frac{v_\varphi}{u_0} - \lambda \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{v_\varphi}{u_0} = -1 \quad (\psi = \lambda;\ 0 < \varphi < \varphi_2). \tag{3,4}$$

Здесь отброшен член $\partial p / \partial \varphi$, имеющий порядок величины Re^{-1} (см. § 4). В следующем приближении, учитывая f в (3,3), получим краевое условие вида:

$$\frac{v_\varphi}{u_0} - \lambda \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{v_\varphi}{u_0} = -1 + Q(\varphi) \quad (\psi = \lambda;\ 0 < \varphi < \varphi_2); \tag{3,5}$$

$$Q(\varphi) \equiv -\frac{\varkappa}{4} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{v_\varphi}{u_0} - \frac{\varkappa}{2u_0} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} \left(1 + \frac{16\varkappa}{105} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{v_\varphi}{u_0} \right) - \frac{4\varkappa^2}{105 u_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2}.$$

Уравнение (3,5) является уточнением краевого условия (4,8) [1]. Для случая пластинки $u_0 = 1$, и уравнение (3,5) переходит в уравнение (2,10).

§ 4. В задаче обтекания пластинки, ранее решенной автором [2], для отыскания простого приближенного решения в области $x>0$ краевое условие удовлетворялось за счет постоянных C_n в общем решении (1,6) [2]. При больших Re точное решение, пригодное для всего потока, можно получить, удовлетворяя краевым условиям за счет постоянных A_n в (1,6) [2]; действительно, опыт говорит, что впереди обтекаемого тела ($x<0$) при больших Re поток потенциален, и поэтому $\mathbf{v}=0$; это требование можно удовлетворить, приняв $C_n=0$, ибо при постоянных A_n имеется множитель $e^{\alpha x}$, который обеспечит равенство $\mathbf{v}|_{x<0}=0$.

При взятии $k+1$ постоянных A_n распределение скорости у пластинки при $x \gg k\lambda$ получаем в виде:

$$(v_x)_{y=\lambda} = \frac{-e^{-\varkappa\left(\frac{1}{2x}-1\right)}}{\sqrt{2x}}\left[2E + \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{k} E_n v_n(x) + \ldots\right], \quad E \equiv \sum_{n=0}^{k} E_n,$$

$$E_n \equiv -\frac{1}{2}A_n\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\varkappa} \quad (n=0,1,\ldots,k), \tag{4,1}$$

$$v_0(x) = \frac{1}{4x}\left(1-\frac{2\varkappa}{x}\right),$$

и остальные функции $v_n(x)$ имеют аналогичный вид. Коэффициент сопротивления c_x получаем из (3,1) [2]:

$$c_x = -\frac{\pi}{\alpha}(A_0+\ldots+A_k) = 2\sqrt{2\pi}\,e^{\varkappa}E\,\mathrm{Re}^{-1/2}. \tag{4,2}$$

Постоянные E_n находим, удовлетворяя краевым условиям (2,8) в окрестности $x={}^1/_2$ подобно тому, как это было сделано ранее; они получаются в виде полиномов по степеням $\varkappa$. Численное значение для $\varkappa$ (т. е. для λ) надо выбрать так, чтобы максимальное значение модуля v_x (v_x всегда <0) и модуль первого отброшенного в ряду (2,4) члена были возможно меньше единицы. Для двух постоянных A_0 и A_1 формула (4,1) принимает вид:

$$(v_x)_{y=\lambda} = \frac{-e^{-\varkappa\left(\frac{1}{2x}-1\right)}}{\sqrt{2x}}\left[2E + \frac{d_0^{(0)}}{d_1 x}\left(\frac{\varkappa}{x}-1\right)\right] \quad (x \gg \lambda), \tag{4,3}$$

и оптимальное значение $\varkappa=3{,}65$; при этом $E=0{,}006826$; $d_1=6408$; $d_0^{(0)}=73{,}58$; коэффициент сопротивления по (4,2) $c_x=1{,}3\,\mathrm{Re}^{-1/2}$. Функция v_x практически равна нулю при $x<0$ и $x=\infty$ (это будет также ее максимум); в промежутке $0<x<\infty$ она имеет один минимум в точке $x=0{,}83$, равный $v_{xm}=-0{,}20$; по середине пластинки $v_x = -0{,}158$. Изменение $\varkappa$ на $\pm 0{,}05$ заметно ухудшает результаты.

Используя q_1, найденное в первом приближении, а именно $q_1 = 1+(v_x)_{y=\lambda}$, находим из (2,2) давление при $y=\lambda$: $p = \mathrm{const} - \mathrm{Re}^{-1}\,\partial v_x/\partial x$, откуда видно, что постоянные C_n порядка величины Re^{-1}.

Физический институт
Ленинградского государственного университета
им. А. А. Жданова

Поступило
23 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Невзглядов, ДАН, 77, № 4 (1951). [2] В. Г. Невзглядов, ДАН, 77, № 5 (1951).