Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

Р. А. МИНЛОС

ПЛОСКАЯ ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ МЕРА МНОЖЕСТВ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 X 1951)

Пусть на квадрате $J^{(2)}=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ задана функция $f(x, y)$ $(0\leqslant f(x, y)\leqslant 1)$ и множество A. Уравнения $z=f(x, y)$, $(x, y)\in A$, определяют множество M точек единичного куба $J^{(3)}=\{0\leqslant x\leqslant 1,$ $0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$. Обозначим через $\varphi(t, M)=\nu(\Pi_t\cap M)$ линейную меру Хаусдорфа пересечения множества M с плоскостью Π_t, определяемой уравнением $z=t$. Тогда, по А. С. Кронроду ([1]), верхний интеграл Лебега

$$\mu(M)=\int_0^1 \overline{\varphi(t, M)\,dt} \tag{1}$$

определяет плоскую вариацию функции $f(x, y)$ на множестве A. Вполне естественно рассматривать в случае произвольного множества $M\subseteq J^{(3)}$ формулу (1) как определение некоторой специальной меры $\mu(M)$ множества M. Мы докажем, что мера эта допускает и другое чисто геометрическое определение, которое получается из общего определения мер Хаусдорфа $L(M)$, если за систему множеств $\mathfrak{A}$ взять прямые круговые цилиндры с осью, параллельной оси z, за функцию $l(u)$ — площадь осевых сечений таких цилиндров ([2]).

Из геометрического определения меры $\mu(M)$ вытекает ([3]) ее полная аддитивность на системе B-множеств $M\subseteq J^{(3)}$. Вместе с доказываемой далее теоремой 2 об эквивалентности геометрического определения и определения по формуле (1) отсюда следует полная аддитивность плоской вариации произвольной B-измеримой функции $f(x, y)$ на классе плоских B-множеств*.

Определение 1. Пусть J^3 — единичный трехмерный куб, z — его ребро. Открытый прямой круговой цилиндр с осью, параллельной z, с высотой и диаметром основания одновременно меньшими $\varepsilon>0$ назовем ε-цилиндром, а площадь его осевого сечения — величиной цилиндра. Для любого покрытия α множества $E\subseteq J^{(3)}$ конечной или счетной системой ε-цилиндров (ε-покрытие) сумму величин этих цилиндров $\sigma(\alpha)$ назовем величиной покрытия, а нижнюю грань $\inf[\sigma(\alpha)]$ по всем ε-покрытиям — ε-приближением цилиндрической меры множества E $\mu_\varepsilon(E)$. И, наконец, $\mu(E)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon(E)\leqslant+\infty$ назовем цилиндрической мерой множества E.

* Полная аддитивность $\mu(M)$ могла бы быть получена и непосредственно из формулы (1), если бы было известно, что для любого B-множества M функция $\varphi(t, M)$ измерима по Лебегу. Однако в найденном нами доказательстве такой измеримости используется приводимая здесь конструкция. В работе А. С. Кронрода ([1]) измеримость $\varphi(t, M)$ установлена для случая, когда множество M получено указанным способом из B-множества $A\subseteq J^{(2)}$ и функции с конечной плоской вариацией на всем квадрате.

Определение 2. Пусть в пространстве $R^{(n)}$ фиксирована мера типа Каратеодори $\nu(E)$ (3). Мы скажем, что эта мера относительно множества E обладает F-свойством, если $\sup[\nu(F_\alpha)] = \nu(E)$, где $\{F_\alpha\}$ — совокупность замкнутых множеств, погруженных в E.

Теорема 1. *Цилиндрическая мера в $J^{(3)}$ обладает F-свойством относительно класса A-множеств (а следовательно, и B-множеств).*

Замечание. Достаточно показать, что в A-множество положительной меры можно погрузить замкнутое множество положительной меры.

Определение 3. Для каждого натурального k разобьем основание куба $J^{(3)}$ — квадрат $J^{(2)}$ на 4^k равных квадратов (k-го ранга). Замкнутые прямоугольные параллелепипеды из $J^{(3)}$ с гранями, параллельными граням $J^{(3)}$, проектирующиеся в какой-нибудь из квадратов k-го ранга и высотой меньшей $1/2^k$, назовем плитками k-го ранга, а площадь боковой грани плитки — величиной плитки. Для каждого k рассмотрим совокупность Ω конечных или счетных покрытий множества E плитками ранга не меньше k. Пусть для $\alpha \in \Omega$ $\sigma(\alpha)$ — сумма величин плиток (величина покрытия α). Тогда $\inf[\sigma(\alpha)] = \chi_k(E)$ назовем k-приближением плиточной меры множества E, а $\lim\limits_{k\to\infty} \chi_k(E) = \chi(E)$ — плиточной мерой множества E. Ясно, что $\chi(E)$ — мера типа Каратеодори.

Лемма 1. *Плиточная и цилиндрическая меры всякого множества одновременно положительны или равны нулю, причем для любого k найдется такое ε_k, что для всех множеств $\mu_{\varepsilon_k}(E) \geqslant {}^1/_9\, \chi_k(E)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.*

Лемма 2. *Пусть $\{E_k\}$ — последовательность множеств из $J^{(3)}$, $E_k \subseteq E_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\mathscr{E} = \bigcup\limits_k E_k$. Тогда для любого n $\chi_n(\mathscr{E}) = \lim\limits_{k\to\infty} \chi_n(E_n) = T < +\infty$.*

Доказательство. Предположим противное: $\chi_n(\mathscr{E}) > T + 4a$ $(a > 0)$ ($\chi_n(\mathscr{E}) < T$ — тривиально исключено). Для каждого множества E_k выберем n-покрытие Σ_k так, что $\sigma(\Sigma_k) - \chi_n(E_k) < \frac{a}{2^k}$.

Если α_1 и α_2 — плитки, а $[\alpha_1]$ и $[\alpha_2]$ — множества их точек, то $([\alpha_1] \cap [\alpha_2])$, как и $(\overline{[\alpha_1] - [\alpha_2]})$ (если α_1 рангом не ниже α_2), образуют плитки, обозначаемые $(\alpha_1 \cap \alpha_2)$ и $(\alpha_1 - \alpha_2)$. Если $\Pi_1 = \{\alpha_i\}$ и $\Pi_2 = \{\beta_j\}$, причем все α_i ранга не ниже всех β_j, то системы плиток $\{\alpha_i \cap \beta_j\}_{i,j}$ и $\{\alpha_i - \beta_j\}_{i,j}$ мы обозначим $\Pi_1 \cap \Pi_2$ и $\Pi_1 - \Pi_2$.

Пусть $\gamma_1^{(n)}$ — совокупность плиток n-го ранга из Σ_1, $\gamma_2^{(n)}$ — совокупность плиток n-го ранга из $(\Sigma_2 - \gamma_2^{(n)})$, $\gamma_3^{(n)}$ — плитки из $[\Sigma_3 - (\gamma_1^{(n)} \cup \gamma_2^{(n)})]$ и т. д. Получим последовательность неперекрывающихся систем плиток $\{\gamma_k^{(n)}\}$. Так как $\sum\limits_1^\infty \sigma(\gamma_k^{(n)}) < \infty$, то можно выбрать k_0 так, что $\sum\limits_{k_0+1}^\infty \sigma(\gamma_k^{(n)}) < \frac{a}{4}$. $M_n = \bigcup\limits_1^{k_0} \gamma_k^{(n)}$ назовем куском n-го ранга. Плитки из $\{\gamma_k^{(n)}\}_{k_0+1}^\infty$ «разменяем» на плитки $(n+1)$-го ранга, присоединив их к соответствующим покрытиям из $\{\Sigma_k\}_{k_0+1}^\infty$, причем величина Σ_k возрастает на $\sigma(\gamma_k^{(n)})$. В дальнейшем будем говорить лишь об измененных таким образом покрытиях, обозначая их Σ_k'.

Пусть $\gamma_1^{(n+1)}$ — плитки $(n+1)$-го ранга из $\Sigma_1 - M_n$, $\gamma_2^{(n+1)}$ — плитки из $[(\Sigma_2 - M_n) - \gamma_1^{(n+1)}]$, $\gamma_k^{(n+1)}$ — плитки из $[(\Sigma_k - M_n) - \bigcup\limits_1^{k-1} \gamma_i^{(n+1)}]$. Ряд $\sum\limits_1^\infty \sigma(\gamma_k^{(n+1)})$

сходится. Возьмем $k_1 > k_0$ так, чтобы $\sum\limits_{k_1+1}^{\infty} \sigma(\gamma_k^{(n+1)}) < \frac{a}{8}$ и $M_{n+1} = \bigcup\limits_1^{k_1} \gamma_k^{(n+1)}$ назовем куском $(n+1)$-го ранга. Снова «разменяв» $\{\gamma_k^{(n+1)}\}_{k_1+1}^{\infty}$ на плитки $(n+2)$-го ранга, присоединим их к соответствующим покрытиям из $\{\Sigma_k'\}_{k_1+1}^{\infty}$, увеличив $\sigma(\Sigma_k')$ на $\sigma(\gamma_k^{(n+1)})$, и будем иметь затем дело лишь с измененными покрытиями, попрежнему обозначая их через Σ_k'. Продолжая так дальше, мы построим последовательность неперекрывающихся кусков $\{M_j\}$. Утверждается, что

$$\sum_n^{\infty} \sigma(M_j) \leqslant T + 3a. \qquad (*)$$

Действительно, иначе нашлось бы N такое, что $\sum\limits_n^{n+N} \sigma(M_j) > T + 3a$. Возьмем $\Sigma'_{k_{N+1}}$. Заметим, что $(\bigcup\limits_n^{n+N} \gamma_1^{(j)}) \cap \Sigma'_{k_{N+1}} = L_1$ покрывает $(\bigcup\limits_n^{n+N} \gamma_1^{(j)}) \cap E_1$, $(\bigcup\limits_n^{n+N} \gamma_2^{(j)}) \cap \Sigma_{k_{N+1}} = L_2$ покрывает $(\bigcup\limits_n^{n+N} \gamma_2^{(j)}) \cap E_2$ и т. д. Поэтому $\sigma(\bigcup\limits_n^{n+N} \gamma_k^{(j)}) - \sigma(L_k) \leqslant \sigma(\Sigma_k') - \chi_n(E_k)$, но $\bigcup\limits_{k=1}^{k_N} \bigcup\limits_{j=n}^{n+N} \gamma_k^{(j)} = \bigcup\limits_{j=n}^{n+N} M_j$, а $\bigcup\limits_{k=1}^{k_N} L_k \subset \Sigma'_{k_{N+1}}$, и, следовательно,

$$\sigma(\bigcup_n^{n+N} M_j) - \sigma\left(\Sigma_{k_{N+1}}\right) \leqslant \sum_1^{k_N} \frac{a}{2^k} + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k_i+1}^{k_N} \sigma(\gamma_k^{(n+i)}) < \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a}{4^p} < 2a.$$

Но $\sigma(\Sigma'_{k_{N+1}}) < T + a$. Отсюда $\sigma(\bigcup\limits_n^{n+N} M_j) < T + 3a$, что и доказывает (*).

Если к $\bigcup\limits_n^{\infty} M_j$ присоединить $\{\bigcup\limits_{k_i+1}^{\infty} \gamma_k^{n+i}\}_1^{\infty}$, то составится n-покрытие Σ_0 множества $\mathfrak{E}$, причем $\sigma(\Sigma_0) \leqslant T + 4a$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $E \subset J^{(3)}$ — A-множество и $\chi(E) > 0$, а следовательно, $\mu(E) > 0$. Пусть $\chi_n(E) > S > 0$. Пусть, далее, $L \subset R^{(4)}$ — множество типа G_δ, проектирующееся в E. $L = \bigcap\limits_k C_k$, где $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ — открытые множества. $C_1 = \bigcup\limits_i F_{1i}$, где $F_{11} \subset F_{12} \subset \ldots$ — замкнутые множества. $\bigcup\limits_i (F_{1i}' \cap E) = E$, где F_{1i}' — проекция F_{1i} в $J^{(3)}$.

Тогда (лемма 2) найдется F_{1i_1}, так что $\chi_n(E \cap F_{1i_1}') > S$, $C_2 \cap F_{1i_1} = \bigcup F_{2i}$, где $F_{21} \subseteq F_{22} \subseteq \ldots$ — последовательность замкнутых множеств. Среди $\{F_{2i}\}$ снова отыщем $F_{2i_2} \subseteq F_{1i_1}$ так, что $\chi_n(F_{2i_2}' \cap E) > S$. Продолжая таким образом, мы получим две последовательности замкнутых вложенных множеств $\{F_{ki_k}\} \subset R^{(4)}$ и $\{F_{ki_k}'\} \subset J^{(3)}$, причем $\bigcap F_{ki_k} \subset L$, а $\bigcap F_{ki_k}' = (\bigcap F_{ki_k})' \subset E$. Но $\mu_{\varepsilon_n}(F_{hi_k}') > {}^1/_9\, S$ для любого k (лемма 1), а следовательно, и $\mu_{\varepsilon_n}(\bigcap F_{hi_k}') \geqslant {}^1/_9\, S$ или $\mu(\bigcap F_{ki_k}') > 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть M — B-множество из куба $J^{(3)}$. Тогда справедливо равенство* (1).

Лемма 3. *Если $\varphi(t, M)$ отлична от нуля на множестве T меры нуль (мы будем говорить: эквивалентна нулю), то $\mu(M) = 0$.*

Лемма 4. *Если F — замкнутое множество из $J^{(3)}$, то $\varphi(t, F)$ измерима и $\mu(F) = \int\limits_0^1 \varphi(t, F)\, dt$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$ и $\lim \varepsilon_n = 0$. Для каждого натурального n мы построим функцию $\varphi_n(t)$ на $[0, 1]$, положив ее равной $\varphi_n(t) = \nu_{\varepsilon_n}(\Pi_t \cap F)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t, F)$ и $\varphi_n(t) \leqslant \varphi_{n+1}(t)$, то доказав, что все $\{\varphi_n(t)\}$ измеримы и $\int\limits_0^1 \varphi_n(t)\,dt = \mu_{\varepsilon_n}(F)$, мы тем самым докажем лемму 4.

1°. Измеримость. Пусть E_c — лебеговское множество $[\varphi_n(t) < c]$. Пусть $t_0 \in E_c$. Возьмем такое ε_n-покрытие α открытыми кругами множества $\Pi_{t_0} \cap F$, что $\sigma(\alpha) < c$, и затем все круги покрытия вытянем в цилиндры во всю высоту куба. Назовем полученную систему цилиндров R. Найдется такая окрестность $u(t_0)$, что для всякой точки $\tau \in u$ $\Pi_\tau \cap F \subset R$ (обратное противоречило бы замкнутости F). Для всех точек u $\nu_{\varepsilon_n}(\Pi_t \cap F) < c$, т. е. $u \in E_c$, т. е. E_c открыто.

2°. Разобьем отрезок $[\min \varphi_n(t), \max \varphi_n(t)]$ на m непересекающихся полуинтервалов точками $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ (включая в полуинтервал нижний конец). Отрезок $[0, 1]$ оси t разобьется на m непересекающихся лебеговских множеств $(L_1, L_2, \ldots, L_m)$. Множество F разобьется на m непересекающихся множеств $(F'_1, F'_2, \ldots, F'_m)$, где F'_i проектируется в L_i. Тогда для каждой точки $t_0 \in L_i$ возьмем такое ε_n-покрытие α $(\Pi_{t_0} \cap F)$, что $\sigma(\alpha) < \lambda_i$ и, как в 1°, построим систему цилиндров R и каждой точке $t_0 \in L_i$ отнесем все ее окрестности $V(t_0)$ такие, что $|V(t_0)| < \varepsilon_n$ и при $\tau \in V(t_0)$ $(\Pi_\tau \cap F) \subset R$. По теореме Витали, извлечем из этого покрытия систему непересекающихся интервалов $\{\delta_s^i\}$, покрывающую $L_i - T_i$, где $\operatorname{mes} T_i = 0$, и такую, что $\operatorname{mes} \bigcup \delta_s^i \leqslant \operatorname{mes} L_i + \eta_i$, где $\eta_i > 0$ произвольно. Каждый интервал δ_s^i порожден некоторой системой цилиндров R_s^i такой, что для всех точек $\tau \in \delta_s^i$ $\Pi_\tau \cap F \subset R_s^i$. Пусть Π_s^i — слой, проектирующийся в δ_s^i. $\bigcup\limits_s \{\Pi_s^i \cup R_s^i\}$ образует ε_n-покрытие α_i цилиндрами той части F'_i, что проектируется в $L_i - T_i$. По лемме 3, покроем часть F'_i, проектирующуюся в T_i, системой цилиндров β_i величины $\leqslant \gamma_i$, где $\gamma_i > 0$ произвольно. Очевидно, $\bigcup\limits_i (\alpha_i \cup \beta_i) = \Lambda$ покрывает F. Отсюда $\mu_{\varepsilon_n}(F) \leqslant \sigma(\Lambda) < \sum\limits_1^m [\lambda_i (\operatorname{mes} L_i + \eta_i) + \gamma_i]$ или $\mu_{\varepsilon_n}(F) \leqslant \Sigma \lambda_i \operatorname{mes} L_i$. В пределе при $|\lambda_i - \lambda_{i+1}| \to 0$ получим $\mu_{\varepsilon_n}(F) \leqslant \int\limits_0^1 \varphi_n(t)\,dt$. Легко получить обратное неравенство.

Следствие. Пусть $\{F_n\}$ — замкнутые множества. Тогда $\varphi(t, \bigcup F_n)$ измерима и для $\bigcup F_n$ имеет место (1).

Лемма 5. *Если $\mu(E) = 0$, то $\varphi(t, E)$ эквивалентна нулю.*

Доказательство теоремы 2. Пусть $L \subset J^{(3)}$ — B-множество и $\mu(L) < \infty$. Найдется множество $R \subseteq L$ типа F_σ такое, что $\mu(R) = \mu(L)$ и, следовательно, $\varphi(t, L - R)$ эквивалентна нулю, т. е. функция $\varphi(t, L)$ измерима и имеет место (1).

Пусть $\mu(L) = \infty$. Погрузим в L множество R типа F_σ такое, что $\mu(R) = \infty$; тогда $\overline{\int\limits_0^1 \varphi(t, L)\,dt} \geqslant \int\limits_0^1 \varphi(t, R)\,dt = \infty$.

Поступило
4 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Кронрод, Усп. матем. наук, **5**, 1 (1950). [2] F. Hausdorff, Math. Ann., **79** (1919). [3] С. Сакс, Теория интеграла, М., 1949.