Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 2

МАТЕМАТИКА

А. В. ШТРАУС

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ РЕЗОЛЬВЕНТ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 XI 1951)

В заметке ([2]) были установлены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы семейство линейных операторов R_λ, действующих в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$ и зависящих от невещественного параметра λ, являлось обобщенной резольвентой данного симметрического оператора A. Однако, как и в случае самосопряженного оператора (([1]), стр. 56—58), естественно поставить вопрос о внутренних свойствах, характеризующих обобщенную резольвенту, не предполагая заранее известным симметрический оператор A, для которого заданное семейство R_λ служит обобщенной резольвентой. Решению этого вопроса посвящена настоящая заметка.

Теорема 1. *Семейство линейных операторов R_λ, действующих в $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{D}(R_\lambda)=\mathfrak{H}$) и зависящих от невещественного параметра λ, является обобщенной резольвентой некоторого симметрического оператора в том и только в том случае, если выполняются следующие условия*:

1) *для некоторого невещественного λ_0 существует в $\mathfrak{H}$ подпространство $\mathfrak{L}$ такое, что*

$$\overline{R_{\lambda_0}\mathfrak{L}}=\mathfrak{H}; \tag{1}$$

при любом невещественном λ и любом $f\in\mathfrak{L}$

$$R_\lambda f-R_{\lambda_0}f=(\lambda-\lambda_0)R_\lambda R_{\lambda_0}f; \tag{2}$$

для любого невещественного λ, принадлежащего одной из полуплоскостей (верхней или нижней), и для любого $\psi\perp[E-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}]\mathfrak{L}$

$$\|R_\lambda\psi\|^2\leqslant\frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}\operatorname{Im}(R_\lambda\psi,\psi); \tag{3}$$

2) *если для некоторого невещественного λ и $h\in\mathfrak{H}$ $R_\lambda h=0$, то $h=0$;*

3) $R_\lambda^*=R_{\bar\lambda}$ *для всякого невещественного λ в одной из полуплоскостей;*

4) R_λ *есть регулярная операторная функция от λ в одной из полуплоскостей*.*

Остановимся сначала на доказательстве необходимости перечисленных условий.

* Из выполнения условий 3) и 4) в одной полуплоскости следует, что они выполняются и в другой.

Пусть R_λ есть обобщенная резольвента симметрического оператора A в $\mathfrak{H}$. Можно предположить, что оператор A замкнут. Тогда имеет место формула М. А. Наймарка:

$$R_\lambda f = P\widetilde{R}_\lambda f \quad (f \in \mathfrak{H}), \tag{4}$$

где $\widetilde{R}_\lambda$ — резольвента некоторого самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ в $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ оператора A, а P — оператор ортогонального проектирования в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$.

Зафиксировав какое-нибудь невещественное λ_0, положим

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{R}(A - \lambda_0 E).$$

Тогда $\overline{R_{\lambda_0}\mathfrak{L}} = \overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}$. (2) следует из известного функционального уравнения резольвенты

$$\widetilde{R}_\lambda - \widetilde{R}_\mu = (\lambda - \mu)\widetilde{R}_\lambda \widetilde{R}_\mu,$$

если умножить обе части на оператор P слева, воспользоваться формулой (4), и, положив $\mu = \lambda_0$, учесть, что $\widetilde{R}_{\lambda_0} f = R_{\lambda_0} f$ для всякого $f \in \mathfrak{L}$. Из известной формулы

$$\|\widetilde{R}_\lambda h\|^2 = \frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}\operatorname{Im}(\widetilde{R}_\lambda h, h) \quad (h \in \widetilde{\mathfrak{H}})$$

и формулы (4) следует неравенство

$$\|R_\lambda f\|^2 \leqslant \frac{1}{\operatorname{Im}\lambda}\operatorname{Im}(R_\lambda f, f),$$

справедливое для любого $f \in \mathfrak{H}$; в частности, выполняется и неравенство (3).

Необходимость условия 2) вытекает непосредственно из известного соотношения $(A^* - \lambda E) R_\lambda f = f$ $(f \in \mathfrak{H})$, которое, например, можно установить, основываясь на формуле (4). В силу этой же формулы (4) и соответствующих свойств резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ семейство R_λ обладает свойствами 3) и 4).

Переходя к доказательству достаточности, предположим, что семейство R_λ удовлетворяет всем перечисленным в теореме условиям. Тогда при любом невещественном λ существует, согласно 2), оператор R_λ^{-1}, а в силу (2)

$$R_{\lambda_0}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}(R_\lambda), \tag{5}$$

$$R_\lambda^{-1} f + \lambda f = R_{\lambda_0}^{-1} f + \lambda_0 f \quad (f \in R_{\lambda_0}\mathfrak{L}). \tag{6}$$

Сопоставляя (1) и (5), видим, что оператор R_λ^{-1} имеет плотную в $\mathfrak{H}$ область определения. Заметим также, что, в силу (6),

$$R_\lambda^{-1} f + \lambda f = R_\mu^{-1} f + \mu f \quad (f \in R_{\lambda_0}\mathfrak{L})$$

для любых невещественных λ и μ. Отсюда следует равенство

$$R_\mu g - R_\lambda g = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda g \quad (g \in R_\lambda^{-1} R_{\lambda_0}\mathfrak{L}). \tag{7}$$

Определим оператор A на плотном в $\mathfrak{H}$ линейном многообразии $\mathfrak{D}(A) = R_{\lambda_0}\mathfrak{L}$ формулой

$$Af = R_{\lambda_0}^{-1} f + \lambda_0 f \quad (f \in \mathfrak{D}(A) = R_{\lambda_0}\mathfrak{L}). \tag{8}$$

Согласно (6) при любом невещественном λ имеем

$$Af = R_\lambda^{-1} f + \lambda f \quad (f \in \mathfrak{D}(A)). \tag{9}$$

Последняя формула в соединении с условием 3) позволяет доказать, что оператор A симметричен. Действительно, для любых $f, g \in \mathfrak{D}(A)$ имеем:

$$(Af, g) = ((R_{\lambda_0}^{-1} + \lambda_0 E) f, g) = (f, (R_{\bar{\lambda}_0}^{-1} + \bar{\lambda}_0 E) g) = (f, Ag).$$

Оператор A замкнут, так как, согласно (8), $\mathfrak{R}(A - \lambda_0 E) = \mathfrak{L}$. Отсюда следует, в частности, что $R_\lambda^{-1} R_{\lambda_0} \mathfrak{L}$ является при любом невещественном λ подпространством в $\mathfrak{H}$, ибо в силу (9) $R_\lambda^{-1} R_{\lambda_0} \mathfrak{L} = \mathfrak{R}(A - \lambda E)$. Заметим тут же, что, согласно (2), $R_\lambda^{-1} R_{\lambda_0} \mathfrak{L} = [E - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L}$.

Покажем, что семейство R_λ служит обобщенной резольвентой оператора A. Заменяя в (9) λ на $\bar{\lambda}$, имеем: $A \subset R_{\bar{\lambda}}^{-1} + \bar{\lambda} E$. Отсюда, переходя к сопряженным операторам, получим $A^* \supset R_\lambda^{-1} + \lambda E$.

В силу последнего соотношения при любом невещественном λ имеет место равенство

$$(A^* - \lambda E) R_\lambda = E. \tag{10}$$

Таким образом, семейство R_λ удовлетворяет условию 1) установленной в ([2]) теоремы 2. Так как, кроме того, условия 3) и 4) в упомянутой теореме те же, что и здесь, то остается показать, что при любом невещественном λ в одной из полуплоскостей

$$\| (A^* - \bar{\lambda} E) R_\lambda h \| \leqslant \| h \| \quad (h \in \mathfrak{H}). \tag{11}$$

В силу (10), полагая $\tau = \operatorname{Im} \lambda$, имеем:

$$\| (A^* - \bar{\lambda} E) R_\lambda h \|^2 = \| h \|^2 + 4\tau^2 \| R_\lambda h \|^2 - 4\tau \operatorname{Im} (R_\lambda h, h).$$

Неравенство (11) будет установлено, если покажем, что

$$\| R_\lambda h \|^2 - \frac{1}{\tau} \operatorname{Im} (R_\lambda h, h) \leqslant 0 \quad (h \in \mathfrak{H}). \tag{12}$$

Представим h в виде $h = g + \psi$, где $g \in [E - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L}$, $\psi \in \mathfrak{H} \ominus [E - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L}$. Принимая во внимание 3) и (7), приходим после несложных выкладок к формуле:

$$\| R_\lambda h \|^2 - \frac{1}{\tau} \operatorname{Im} (R_\lambda h, h) = \| R_\lambda \psi \|^2 - \frac{1}{\tau} \operatorname{Im} (R_\lambda \psi, \psi).$$

Согласно (3), правая часть этого равенства неположительна, и неравенство (12), таким образом, доказано. Этим завершается доказательство теоремы.

Анализируя доказательство теоремы 1, мы попутно получаем результат, относящийся к резольвенте максимального симметрического, а также самосопряженного оператора.

Теорема 2. *Для того чтобы семейство линейных операторов R_λ ($\mathfrak{D}(R_\lambda) = \mathfrak{H}$) было резольвентой некоторого максимального симметрического оператора, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* 2), 3) *теоремы* 1 *и чтобы для некоторого фиксированного невещественного λ_0 и любого невещественного λ имело место равенство*

$$R_\lambda - R_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0) R_\lambda R_{\lambda_0}.$$

R_λ *является резольвентой самосопряженного оператора тогда и только тогда, если, кроме того, выполняется условие: из*

$$h - (\lambda_0 - \overline{\lambda}_0) R_{\overline{\lambda}_0} h = 0 \text{ следует } h = 0^*. \tag{13}$$

Ульяновский государственный
педагогический институт

Поступило
7 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Плеснер, Усп. матем. наук, в. 9 (1941). [2] А. В. Штраус, ДАН, **78**, № 2 (1951).

* Вместо (13) можно бы ввести условие:

$$R_{\lambda_0} - R_{\overline{\lambda}_0} = (\lambda_0 - \overline{\lambda}_0) R_{\lambda_0} R_{\overline{\lambda}_0};$$

последнее в соединении с 2) влечет (13).