Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН и Н. Н. МЕЙМАН

О ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 8 X 1951)

1. В настоящей заметке теорема единственности заметки (1) доказывается в предположении, что при $x \to +\infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}\,x} \, |d\sigma(\lambda)| = O(e^{\alpha x^2}),$$

где α — положительная константа.

Теорема 1. *Пусть для всех действительных* x

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}\, x \, d\sigma(\lambda) = 0, \qquad (1)$$

причем функция $\sigma(\lambda)$ *такова, что для всех действительных* x

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\cos\sqrt{\lambda}\, x| \, |d\sigma(\lambda)| < \infty.$$

Если при $x \to +\infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}\,x} \, |d\sigma(\lambda)| = O(e^{\alpha x^2}), \qquad (2)$$

где α *— положительная константа, то* $\sigma(\lambda) = \mathrm{const}$.

Доказательство. Как показано в (1), достаточно показать, что функция $F(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} \cos\sqrt{\lambda} z \, d\sigma(\lambda)$ есть константа. Пусть $z = x + iy$. Оценим $F(z)$ при больших x.

В силу (2)

$$|F(z)| = \frac{1}{2}\left|\int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^{-\sqrt{|\lambda|}\,x - i\sqrt{|\lambda|}\,y} + e^{\sqrt{|\lambda|}\,x + i\sqrt{|\lambda|}\,y}\right) d\sigma(\lambda)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}\,|x|} \, |d\sigma(\lambda)| = O(e^{\alpha x^2}) = O(e^{\alpha r^2 \cos^2\varphi}) \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi). \qquad (3)$$

Введем в рассмотрение индикатрису

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^2}$$

и рассмотрим ее для определенности в углу $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

На сторонах этого угла $|F(z)|$ ограничена. В самом деле, если $z=iy$, то $F(iy)=\int\limits_{-\infty}^{0}\cos\sqrt{|\lambda|}\,y\,d\sigma(\lambda)$. Последний интеграл ограничен. Если же $z=x$, то, в силу (1),

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0}\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sigma(\lambda)=-\int\limits_{0}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}\,x\,d\sigma(\lambda),$$

и, значит, $F(x)$ ограничена. Поэтому $h(0)=h(\pi/2)=0$. В силу известных теорем Линделефа (см. ([2]), стр. 114—115) $h(\varphi)=A\sin 2\varphi+B\cos 2\varphi$. Из $h(0)=0$ следует $B=0$, т. е. $h(\varphi)=2A\sin\varphi\cos\varphi$. С другой стороны, из оценки (3) следует, что $h(\varphi)\leqslant\alpha\cos^2\varphi$. Неравенство $2A\sin\varphi\cos\varphi\leqslant\alpha\cos^2\varphi$ при $\varphi\to\pi/2$ возможно лишь при $A=0$, т. е. рост функции $F(z)$ не выше минимального типа второго порядка. Так как $F(z)$ ограничена на вещественной и мнимой осях, то из классической теоремы Фрагмена — Линделефа следует, что $F(z)=\text{const}$, что и требовалось доказать.

Аналогичная теорема единственности имеет место для интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}\,d\sigma(\lambda)$$

и для интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}j_p(\sqrt{\lambda}\,x)\,d\sigma(\lambda),$$

где

$$j_p(\sqrt{\lambda}\,x)=\frac{2^p\,\Gamma(p+1)\,J_p(\sqrt{\lambda}\,x)}{(\sqrt{\lambda}\,x)^p}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(p+1)}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\lambda^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

2. Важное применение рассмотренной теоремы единственности дано в ([3]). Используя теорему 1 настоящей заметки, можно уточнить условие ортогональности спектральной функции, данное в ([3]) (см. теорему на стр. 347). А именно, *спектральная функция* $\rho(\lambda)$ *ортогональна, если при* $x\to+\infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\sqrt{|\lambda|}\,x}\,d\rho(\lambda)=O(e^{\alpha x^2}),$$

где α *— положительная константа.*

В заключение сделаем еще следующие замечания. Как показано одним из нас ([4]), разложение в интеграл Фурье по собственным функциям дифференциального уравнения второго порядка на полупрямой $(0,\infty)$ может быть получено с помощью простого предельного перехода из разложения в конечном интервале. Однако ортогональность разложения в интервале $(0,\infty)$ доказывалась довольно сложно с помощью интегрального представления резольвенты. Теорема 1 дает возможность просто доказать во многих случаях ортогональность разложения. Действительно, после того как доказана теорема разложения в интеграл Фурье и, следовательно, получена функция $\rho(\lambda)$, можно доказать ортогональность разложения в интеграл Фурье, повторяя рассуждения из ([3]), если только функция $\rho(\lambda)$ удовлетворяет условию (4). В частности, если, например, дифференциальный оператор полуограничен, то существует такое $c > -\infty$, что $\rho(\lambda) = \text{const}$ для $\lambda < c$. Поэтому при $x \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}x}\, d\rho(\lambda) = \int_{c}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}x}\, d\rho(\lambda) = O\left(e^{\sqrt{|c|}x}\right)$$

и, значит, условие (4) наверное выполняется.

Поступило
6 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, ДАН, 76, № 4 (1951). [2] Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 26 (1949). [3] И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 309 (1951). [4] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям..., 1950.