Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 2

МАТЕМАТИКА

Академик С. Л. СОБОЛЕВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ СИСТЕМ, НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ТИПУ КОВАЛЕВСКОЙ

Задача Коши в неограниченном пространстве для системы

$$\mathbf{N}(\mathbf{v}, p) \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) + \operatorname{grad} p = \mathbf{F}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \psi$$

или для уравнения

$$Lp \equiv \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = f \tag{2}$$

может быть решена в явном виде.

Для того чтобы построить такое решение, мы построим в явном виде оператор, обратный оператору $\mathbf{N}(\mathbf{v}, p), \operatorname{div} \mathbf{v}$. С этой целью выведем для этих задач формулу, аналогичную формуле Грина, и укажем некоторые частные решения однородных уравнений (1) и (2), являющиеся фундаментальными. Применение формулы Грина к неизвестной системе решений (1) и к фундаментальному решению дает явное выражение решения (1) и (2) через известные элементы, т. е. явное выражение для искомого обратного оператора.

Для наших целей интерес представляют два класса частных решений уравнения

$$L\Phi = 0, \tag{3}$$

а именно решения вида

$$\Phi = \rho^m r^{-m-s} \psi\left(\frac{\rho\tau}{r}\right), \tag{4}$$

где

$$\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \qquad r^2 = (z - z_0)^2 + \rho^2, \qquad \tau = t - t_0, \tag{5}$$

и решения вида

$$\Phi = (x - x_0)\, \rho^m r^{-m-s} \psi\left(\frac{\rho\tau}{r}\right). \tag{6}$$

Непосредственной проверкой можно доказать, что везде, кроме точки $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и, может быть, плоскости $t = 0$, решения вида (4) существуют, если функция $\psi\left(\frac{\rho\tau}{r}\right) = \psi(\xi)$ представляет собою совместное решение двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\Lambda_1 \equiv \xi\psi''' + [m - (s+1)(s-2)]\, \psi'' + \xi\psi' + (m+s)\, \psi = 0, \tag{7}$$

$$\Lambda_2 \equiv \xi^2\psi^{\mathrm{IV}} + (2m+5)\xi\, \psi''' + [\xi^2 + (m+2)^2]\, \psi'' + (2m+2s+2)\, \xi\psi' + \\ + (m+s)(m+s+1)\, \psi = 0. \tag{8}$$

Имеет место тождество:

$$\Lambda_2 \equiv \xi \frac{d\Lambda_1}{d\xi} + (m+s+1)\Lambda_1 + (s-1)^2 [\xi\psi''' + (m+s+2)\psi'']. \tag{9}$$

Таким образом, для существования совместного решения у (7) и (8) необходимо одно из двух: либо $s=1$, либо соблюдение уравнения

$$\xi\psi''' + (m+s+2)\psi'' = 0. \tag{10}$$

Совместное решение уравнений (7) и (10) мы искать не будем, нас будут интересовать решения, получаемые при $s=1$, когда для любых m функция (4) будет решением, если справедливо (7). Уравнение (7) при $s=1$ в свою очередь упрощается. Полагая $\psi = d^m\chi/d\xi^m$, можем придать ему вид:

$$\Lambda_1 \equiv \psi''' + (m+2)\psi'' + \xi\psi' + (m+1)\psi \equiv$$
$$\equiv \xi\frac{d^{m+3}\chi}{d\xi^{m+3}} + (m+2)\frac{d^{m+2}\chi}{d\xi^{m+2}} + \xi\frac{d^{m+1}\chi}{d\xi^{m+1}} + (m+1)\frac{d^m\chi}{d\xi^m} = \frac{d^{m+1}}{d\xi^{m+1}}(\xi\chi''+\chi'+\xi\chi). \tag{11}$$

Уравнение

$$\xi\chi'' + \chi' + \xi\chi \tag{12}$$

есть уравнение Бесселя. Таким образом, интересующие нас решения можно получить для разных m как функцию Бесселя $J_0(\xi)$ при $m=0$, ее производные при $m>0$ или первообразные для нее при $m<0$.

Выкладками, аналогичными прежним, можно убедиться в том, что решение вида (6) будет существовать, если функция ψ будет удовлетворять системе уравнений

$$\Lambda_1 + 2s\psi'' = 0, \tag{13}$$

$$(s-1)(s-3)[\xi\psi''' + (m+s+2)\psi''] = 0. \tag{14}$$

Сохраняя лишь те решения, в которых $s=1$ или $s=3$, приходим к уравнениям для ψ:

$$\xi\psi''' + (m+4)\psi'' + \xi\psi' + (m+1)\psi = 0 \quad \text{для} \quad s=1, \tag{15}$$

$$\xi\psi''' + (m+2)\psi'' + \xi\psi' + (m+3)\psi = 0 \quad \text{для} \quad s=3. \tag{16}$$

Оба эти уравнения могут быть решены в бесселевых функциях, производных и интегралах от них. Полагая $\psi = d^m x/d\xi^m$ в (15), получим:

$$\xi\frac{d^{m+3}\chi}{d\xi^{m+3}} + (m+4)\frac{d^{m+2}\chi}{d\xi^{m+2}} + \xi\frac{d^{m+1}\chi}{d\xi^{m+1}} + (m+1)\frac{d^m\chi}{d\xi^m} = \frac{d^{m+1}}{d\xi^{m+1}}(\xi\chi''+3\chi'+\xi\chi) = 0. \tag{17}$$

Так же точно в (16) положим

$$\psi = \frac{d^{m+2}\chi}{d\xi^{m+2}},$$

после чего уравнение (16) запишется:

$$\frac{d^{m+3}}{d\xi^{m+3}}(\xi\chi'' - \chi' + \xi\chi) = 0. \tag{18}$$

Уравнение (17) подстановкой $\chi = \frac{1}{\xi}\omega$, а уравнение (18) — подстановкой $\chi = \xi\omega$ преобразуются к виду

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\left[\omega'' + \frac{1}{\xi}\omega' + \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right)\omega\right] = 0, \quad k = m+1, \quad m+3, \tag{19}$$

решением которого служат функции Бесселя 1-го порядка.

Нас будут интересовать частные решения (16).

Для решения задачи Коши для системы (1) построим функции:

$$\Phi_{\mathrm{I}} = \Phi^{11} - \Phi^{12}, \quad \Phi_{\mathrm{II}} = \Phi^{21} + \Phi^{22}, \quad \Phi_{\mathrm{III}} \quad \text{и} \quad Q$$

по формулам

$$\Phi^{11} = \frac{(x-x_0)(t-t_0)}{\rho r^2} J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right); \quad \Phi^{12} = \frac{(y-y_0)\tau}{\rho^2 r} J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right) - \frac{y-y_0}{\rho^3}\int_0^{\rho\tau/r} J_0(\xi)\,d\xi;$$

$$\Phi^{21} = \frac{(y-y_0)\tau}{\rho r^2} J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right); \quad \Phi^{22} = \frac{(x-x_0)\tau}{\rho^2 r} J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right) - \frac{x-x_0}{\rho^3}\int_0^{\rho\tau/r} J_0(\xi)\,d\xi; \tag{20}$$

$$\Phi_{\mathrm{III}} = \frac{(z-z_0)\tau}{\rho r^2} J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right); \quad Q = \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho\tau/r} J_0(\xi)\,d\xi.$$

Полезно заметить, что функции эти удовлетворяют уравнениям:

$$L\Phi_{\mathrm{I}} = L\Phi_{\mathrm{II}} = L\Phi_{\mathrm{III}} = LQ = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial t} = (\vec{\Phi}\times k) - \operatorname{grad}_0 Q = 0; \quad \operatorname{div}_0\vec{\Phi} = 0, \tag{22}$$

где через $\vec{\Phi}$ обозначено

$$\vec{\Phi} = \mathbf{i}\Phi_{\mathrm{I}} + \mathbf{j}\Phi_{\mathrm{II}} + \mathbf{k}\Phi_{\mathrm{III}}. \tag{23}$$

При помощи функции Φ_{I}, Φ_{II} и Φ_{III} и формулы (17) заметки ([1]) можно построить три частных решения однородной системы (1), которые мы обозначим через $\mathbf{w}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{w}_{\mathrm{II}}$ и $\mathbf{w}_{\mathrm{III}}$.

Формула Грина для системы (1) может быть написана в виде

$$\int_0^{t_0}\left\{\iiint_\Omega [(\mathbf{w}, \mathbf{N}(\mathbf{v}, p)) + (\mathbf{v}, \mathbf{N}(\mathbf{w}, q)) - q\operatorname{div}\mathbf{v} - p\operatorname{div}\mathbf{w}]\,d\Omega\right\}dt_0 =$$

$$= \int_0^{t_0}\left\{\iint_S (w_n p + v_n q)\,dS\right\}dt_0 + \left[\iiint_\Omega (\mathbf{v}, \mathbf{w})\,d\Omega\right]_{t=0}^{t=t_0}, \tag{24}$$

где $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ — два произвольных вектора, а q и p — две произвольные скалярные функции.

Условимся еще в одном обозначении. Пусть точка x_0, y_0, z_0 вырезана из области Ω малым цилиндром $\rho \leqslant \eta$; $|z_0 - z| \leqslant h$. Оставшаяся область пусть будет Ω^*.

Обозначим:

$$\text{Г.з.ц.}\iiint_\Omega f(x, y, z)\,d\Omega = \lim_{\eta\to 0}\iiint_{\Omega^*} f(x, y, z)\,d\Omega,$$

$$\text{Г.з.д.}\iiint_\Omega f(x, y, z)\,d\Omega = \lim_{h\to 0}\iiint_{\Omega^*} f(x, y, z)\,d\Omega. \tag{25}$$

Применяя к $\mathbf{v}$, p и $\mathbf{w}_{\mathrm{I}}$, q_{I}; $\mathbf{w}_{\mathrm{II}}$, q_{II}; $\mathbf{w}_{\mathrm{III}}$, q_{III} формулу Грина и пользуясь тем, что

$$\int_0^1 \frac{\zeta J_0(\zeta\tau)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,d\zeta = \frac{\sin\tau}{\tau}, \tag{26}$$

после проведения соответствующих выкладок получим:

$$v_x(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{2} v_x(x_0, y_0, z_0, 0) - \text{Г.з.ц.}\, \frac{1}{2\pi} \iiint (\mathbf{v}, \mathbf{w}_{\mathrm{I}}) \Big|_{t=0} d\Omega + \int_0^{t_0} \left\{ F_x - \text{Г.з.ц.}\, \frac{1}{2\pi} \iiint [(\mathbf{w}_{\mathrm{I}}, \mathbf{F}) - q_{\mathrm{I}}\psi] \, d\Omega \right\} dt,$$

$$v_y(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{2} v_y(x_0, y_0, z_0, 0) - \text{Г.з.ц.}\, \frac{1}{2\pi} \iiint (\mathbf{v}, \mathbf{w}_{\mathrm{II}}) \Big|_{t=0} d\Omega + \int_0^{t_0} \left\{ F_y - \text{Г.з.ц.}\, \frac{1}{2\pi} \iiint [(\mathbf{w}_{\mathrm{II}}, \mathbf{F}) - q_{\mathrm{II}}\psi] \, d\Omega \right\} dt, \tag{27}$$

$$v_z(x_0, y_0, z_0, t_0) = -\text{Г.з.д.}\, \frac{1}{4\pi} \iiint (\mathbf{v}, \mathbf{w}_{\mathrm{III}}) \Big|_{t=0} d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int_0^{t_0} \left\{ \text{Г.з.д.} \iiint [(\mathbf{w}_{\mathrm{III}}, \mathbf{F}) - q_{\mathrm{III}}\psi] \, d\Omega \right\} dt.$$

Задача Коши для уравнения (2) решается таким же методом, если воспользоваться формулой Грина:

$$\int_0^{t_0} \left\{ \iiint_{\Omega} (wLu - uLw) \, d\Omega \right\} dt = \left[\iiint_{\Omega} \left(w \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \Delta u \frac{\partial w}{\partial t} \right) d\Omega \right]_{t=0}^{t=t_0} + \int_0^{t_0} \left\{ \iint_S \left[u \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial n} + \left(u \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos nz \right] dS \right\} dt. \tag{28}$$

Взяв вместо u неизвестную функцию, а вместо w — решение уравнения $Lw = 0$:

$$w = \frac{1}{r} J_0\left(\frac{\rho\tau}{r} \right), \tag{29}$$

получим, проведя соответствующие выкладки:

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint \left\{ \frac{1}{r} J_0\left(\frac{\rho t_0}{r} \right) \Delta u \Big|_{t=0} + \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho t_0 / r} J_0(\xi) \, d\xi \cdot \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} \right\} d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int_0^{t_0} \left\{ \iiiint \left[\frac{1}{\rho} \int_0^{\rho(t_0 - t)/r} J_0(\xi) \, d\xi \right] f \, d\Omega \right\} dt. \tag{30}$$

Формулы (29) и (30) имеют любопытный качественный характер.

Фундаментальные решения $L\Phi$, как например $w = \frac{1}{r} J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)$, при возрастании τ образуют систему волн на поверхности каждой сферы $r = \text{const}$. Эти волны, зарождаясь на экваторе, двигаются по направлению к полюсам, накапливаясь во все большем и большем количестве на поверхности сферы. Волны большого масштаба порождают таким образом волны мелкого масштаба.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
14 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, ДАН, 82, № 1 (1952).