

Б. И. КОРЕНБЛЮМ

**ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РЯДОВ
ДИРИХЛЕ**

(Представлено академиком М. В. Келдышем 18 X 1951)

1°. Среди теорем тауберова типа особое место занимает следующий результат Харди и Литтлвуда (1):

Пусть дана возрастающая последовательность положительных чисел

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad (1)$$

удовлетворяющая условию

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq k > 1 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

Тогда из соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s \quad (A, \lambda_n), \quad (3)$$

т. е. из равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-\lambda_n x} = s, \quad (3')$$

всегда следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s. \quad (4)$$

Этот результат отличается от других тауберовых теорем тем, что в нем не налагаются никакие явные ограничения на порядок величин u_n .

Легко показать, что условие (2) в теореме Харди и Литтлвуда не может быть ослаблено. Более того, если это условие нарушается, то перестает быть верной и теорема $(R, \lambda_n, 1) \rightarrow (R, \lambda_n, 0)$, которая, вообще говоря, слабее приведенной теоремы $(A, \lambda_n) \rightarrow (R, \lambda_n, 0)$; символ (R, λ_n, α) обозначает суммируемость методом Рисса:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s \quad (R, \lambda_n, \alpha)$$

эквивалентно соотношению

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_n \leq \tau} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\tau}\right)^{\alpha} u_n = s \quad (\alpha > 0).$$

2°. Естественно поставить вопрос: какое условие нужно наложить на последовательность $\{\lambda_n\}$, чтобы была справедлива теорема $(A, \lambda_n) \rightarrow (R, \lambda_n, r)$, где r — целое неотрицательное число.

Оказывается, что таким условием являются неравенства

$$\frac{\lambda_{n+r+1}}{\lambda_n} \geq k > 1 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

которые при $r = 0$ обращаются в (2). Более точно, справедлива

Теорема 1. Пусть дана последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющая условию (5), где r — целое неотрицательное число. Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{0 < \tau < \infty} \left| \sum_{\lambda_n \leq \tau} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\tau}\right)^r u_n \right| \leq M \sup_{0 < x < \infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-\lambda_n x} \right|, \quad (6)$$

каковы бы ни были комплексные числа u_n такие, что ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-\lambda_n x}$ сходится при $x > 0$; при этом число M зависит только от r и k . Далее, из соотношения (3) всегда следует

$$u_1 + u_2 + \dots = s \quad (R, \lambda_n, r). \quad (7)$$

3°. Доказательство теоремы 1 основано на следующей теореме, устанавливающей, что при выполнении условия (5) из суммируемости $(R, \lambda_n, r+1)$ всегда следует суммируемость (R, λ_n, r) .

Теорема 2. Если возрастающая последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию (5), то справедливо неравенство

$$\sup_{0 < \tau < \infty} \left| \sum_{\lambda_n \leq \tau} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\tau}\right)^r u_n \right| \leq M \sup_{0 < \tau < \infty} \left| \sum_{\lambda_n \leq \tau} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\tau}\right)^{r+1} u_n \right|, \quad (8)$$

где u_n — произвольные комплексные числа, а M зависит только от r и k . Далее, из соотношения

$$u_1 + u_2 + \dots = s \quad (R, \lambda_n, r+1) \quad (9)$$

всегда следует (7).

Обратно, если условие (5) не выполнено, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+r+1}}{\lambda_n} = 1, \quad (10)$$

то можно построить вещественный ряд Σu_n такой, что

$$u_1 + u_2 + \dots = 0 \quad (R, \lambda_n, r+1)$$

и

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_n \leq \tau} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\tau}\right)^r u_n = +\infty.$$

Вторая часть этой теоремы показывает, что условие (5) в теореме 1, вообще говоря, не может быть ослаблено, так как для последовательностей $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющих (10), утверждение $(R, \lambda_n, r+1) \rightarrow (R, \lambda_n, r)$ становится неверным.

Доказательство теоремы 2 вполне элементарно, хотя и громоздко. После ее установления теорема 1 доказывается с помощью общей тауберовой теоремы Винера.

4°. Неравенства (6) и (8), которые используются при доказательстве основных утверждений теорем 1 и 2, представляют и самостоятельный интерес. С их помощью удастся упростить, а в ряде случаев и решить до конца одну задачу интерполяции, относящуюся к теории абсолютно монотонных функций.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
13 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Proc. London Math. Soc., (2), 25, 219 (1926).