Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 2

МАТЕМАТИКА

Г. С. САЛЕХОВ

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К РЕШЕНИЮ КВАДРАТНО-ОПЕРАТОРНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 XI 1951)

§ 1. Рассмотрим квадратно-операторное уравнение

$$HL^2x - Lx = x, \tag{1}$$

где L — искомый оператор, H — некоторый линейный оператор, переводящий элементы нормированного пространства X в X. Будем решать уравнение (1) итеративным процессом

$$H_{n+1}L_{n+1}x - L_{n+1}x = x, \tag{2}$$

где $H_{n+1} = HL_n$, L_0 и $L_1 = J$ тождественный оператор.

В § 1 настоящей работы для уравнения (1), пользуясь некоторыми идеями из теории цепных дробей, доказываются две теоремы. Первая из этих теорем доказывает условия существования, единственности решения, быстроту сходимости процесса (2) к решению и дает область расположения последнего. Вторая теорема дает эффективный способ приближенного решения уравнения (1) без необходимости последовательного решения линейных уравнений (2). Далее в § 2 показывается, что для квадратно-функциональных уравнений типа (16) также может быть доказан аналог теоремы 1.

Теорема 1. *Если в пространстве X имеет место условие*

$$\|H\| = q \leqslant {}^1/_4, \tag{3}$$

то в области

$$\|L\| < \frac{1-\sqrt{1-4q}}{2q} \tag{4}$$

уравнение (1) *имеет единственное решение L^*, которое является также линейным оператором. При этом, если $q < {}^1/_4$, то*

$$\|L^* - L_n\| < \frac{\delta^n}{1-\delta}, \tag{5}$$

где
$$\delta = \frac{1-\sqrt{1-4q}}{1+\sqrt{1-4q}} < 1.$$

Если же $q = {}^1/_4$, *то*

$$\|L^* - L_n\| < 4\left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\right]. \tag{6}$$

Доказательство. Зная, что

$$\|H_{n+1}\| < \|H\| \|L_n\| \tag{7}$$

и $L_0 = 0$, $L_1 = J$, пользуясь условием (3) и теоремой Банаха, имеем

$$\|H_{n+1}\| < \cfrac{q}{1-\cfrac{q}{1-\cfrac{q}{1-\cdots\cfrac{q}{1-q}}}} = \lambda_n < 1, \tag{8}$$

где λ_n есть n-я подходящая дробь соответствующей цепной дроби. Во-вторых,

$$\|L_{n+1}\| < \frac{\lambda_n}{q}. \tag{9}$$

При этом, как известно ([1, 2]), если $q < {}^1/_4$, то

$$\lambda_n = \lambda \frac{1-\delta^n}{1-\delta^{n+1}}, \tag{10}$$

где $\lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \lambda$,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = {}^1/_2 - \sqrt{{}^1/_4 - q}, \quad \delta = \frac{1-\sqrt{1-4q}}{1+\sqrt{1-4q}}. \tag{11}$$

Если же $q = {}^1/_4$ то, очевидно,

$$\lambda = \frac{n\lambda}{1+n}. \tag{12}$$

Далее, согласно теореме Банаха, имеем

$$L_{n+1} - L_n = (H_{n+1} - H_n) + (H_{n+1}^2 - H_n^2) + (H_{n+1} - H_n^3) + \ldots \tag{13}$$

Но, учитывая, что операторы H и L_n для различных n коммутируют друг с другом, а также $\|H_{n+1} - H_n\| \leqslant \|H\| \|L_n - L_{n-1}\|$ и $\|H_{n+1}^m + H_{n+1}^{m-1} H_n + H_{n+1}^{m-2} H_n^2 + \ldots + H_n^m\| \leqslant (m+1)\lambda_n^m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, из (13) получим неравенство

$$\|L_{n+1} - L_n\| \leqslant \frac{q}{(1-\lambda_n)^2} \|L_n - L_{n-1}\|.$$

Это позволяет доказать, что $\lim \|L_{n+p} - L_n\| = 0$ (дл любого $p \geqslant 0$). Таким образом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L^*$. Если последовательность $L_n(x)$ линейных функционалов, определенных в X, сходится в X, то $L^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} L_n(x)$ есть линейный функционал.

Далее, зная, что $L_0 = 0$, $L_1 = J$, при $q < {}^1/_4$ получим $\|L^* - L_n\| \leqslant \frac{\delta^n}{1-\delta}$, а при $q = {}^1/_4$ будем иметь $\|L^* - L_n\| \leqslant 4\left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}\right]$.

Переходя к пределу в уравнении (2) при $n \to \infty$, докажем, что оператор L^* удовлетворяет уравнению (1) при всех $x \subset X$. На основании (9) область существования решения определяется неравенством

$$\|L^*\| \leqslant \frac{\lambda}{q} = \frac{1-\sqrt{1-4q}}{2q}.$$

Наконец, в силу того, что каждое из уравнений (2) имеет единственное решение L_{n+1}, доказывается также единственность решения L^*.

Теорема 2. *При выполнении условия* (3) *имеет место равенство*

$$L_n = Q_n^{-1} Q_{n-1}, \tag{14}$$

где операторы Q_n вычисляются из рекурентного соотношения

$$Q_{n+1} = Q_n + HQ_{n-1}, \tag{15}$$

причем $Q_{-1} = Q_0 = J$.

Доказательство. Во-первых докажем, что при условии (3) существует Q_n^{-1}. В самом деле, благодаря условию $\|H\| = q \leqslant {}^1/_4$, очевидно, можно положить $q = \alpha - \alpha^2$, где ${}^1/_2 \leqslant \alpha \leqslant 1$, так как $\max\limits_{{}^1/_2 \leqslant \alpha \leqslant 1} (\alpha - \alpha^2) = {}^1/_4$.

Далее, на основании (15) имеем $\|Q_n x\| - \alpha \|Q_{n-1} x\| \geqslant (1-\alpha) \times \times [\|Q_{n-1} x\| - \alpha \|Q_{n-2} x\|]$. Отсюда, зная, что $\|Q_0\| = \|Q_{-1}\| = 1$, получим $\|Q_n x\| > \alpha^n \|x\|$, т. е. $\|Q_n^{-1}\| < \alpha^{-n}$.

Заметим, что, согласно (15), операторы Q_i и Q_j с любыми целыми индексами i и $j \geqslant -1$ будут между собой коммутативны, и поэтому $Q_i^{-1} Q_j^{-1} = Q_j^{-1} Q_i^{-1}$.

Теперь, если положить $L_n = Q_n^{-1} Q_{n-1}$, в силу указанной коммутативности, мы легко убеждаемся, что операторы $Q_n^{-1} Q_{n-1}$ тождественно удовлетворяют уравнениям (2) для любого $n \geqslant 0$.

§ 2. Рассмотрим квадратно-функциональное уравнение

$$x = Hx^2 + y, \tag{16}$$

где операция H переводит квадраты элементов нормированного кольца $X \supset x$ в элементы этого же пространства. Если уравнение (16), где x — неизвестное, решать методом, аналогичным § 1, то получим следующий результат:

Теорема 3. *Уравнение* (16) *в области, определяемой неравенством*

$$\|x\| \leqslant \frac{1 - \sqrt{1-4q}}{2q} \|y\|, \tag{17}$$

где $q = \|y\| \|H\| \leqslant {}^1/_4$, *имеет единственное решение* x^*, *которое может быть вычислено итеративным процессом* $x_{n+1} = Hx_n x_{n+1} + y$ $(x_0 = 0)$. *При этом скорость сходимости последнего определяется следующими неравенствами:*
если $q < {}^1/_4$, *то*

$$\|x^* - x_n\| < \frac{\delta^n \|y\|}{1-\delta},$$

где $\delta = \dfrac{1-\sqrt{1-4q}}{1+\sqrt{1-4q}} < 1$;
если же $q = {}^1/_4$, *то*

$$\|x^* - x_n\| < 4\left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}\right] \|y\|.$$

Для уравнения (16) теорема 2 аналога не имеет.

Примечания. 1. Факт существования решения, указанный в теоремах 1 и 3, а также единственность в несколько более широкой области вытекают также из теорем Л. В. Канторовича ([4]) о сходимости процесса Ньютона.

2. Заметим, что для случая квадратных нелинейных интегральных уравнений типа

$$x(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x^2(t)\, dt + y(s)$$

процесс итераций, определяемый последовательным решением линейных уравнений

$$x_{n+1}(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x_n(t)\, x_{n+1}(t)\, dt + y(s) \quad (x_0(s) = 0), \tag{18}$$

практически удобен в том отношении, что для приближенного решения каждого из них естественно, например, использовать метод Рица или же аналог этого метода — «смешанный» метод, указанный Л. В. Канторовичем (([3]), стр. 128). При этом последовательное решение уравнений (18) для каждого приближения сводится к однотипным вычислениям коэффициентов Фурье и к решению некоторых линейных систем алгебраических уравнений.

Пример. Рассмотрим решение нелинейного интегрального уравнения

$$x(s) = \frac{s}{4}\int_0^1 e^{-st} x^2(t)\, dt + \frac{1}{4}(3 + e^{-s}) \tag{19}$$

в пространстве $X = C$. В данном случае $q = {}^1/_4$. Область существования и единственности определяется неравенством $|x| \leqslant 2$. При $x_0(s) = 0$ вычисление второго приближения $x_2(s)$ сводится к решению линейного интегрального уравнения

$$x_2(s) = \frac{s}{16}\int_0^1 (3 + e^{-t})\, e^{-st} x_2(t)\, dt + \frac{1}{4}(3 + e^{-s}). \tag{20}$$

Решая это уравнение «смешанным» методом Л. В. Канторовича ([3]), полагая $x_2(s) \cong C_1 + C_2 \cos \pi s + C_3 \cos 2\pi s$, получим

$$x_2(s) \cong 0{,}9916 + 0{,}0050 \cos \pi s + 0{,}0007 \cos 2\pi s.$$

Если уравнение (20) решать способом замены интегрального уравнения конечной системой линейных алгебраических уравнений (([4]), стр. 111) и использовать при этом формулу Гаусса с двумя ординатами, получим

$$\overline{x_2(s)} \cong \frac{3 + e^{-s}}{4} + \frac{s}{32}\left[3{,}7921\, e^{-0{,}2113 s} + 3{,}4126\, e^{-0{,}7887 s}\right].$$

Проверка полученных решений в узловых точках Гаусса дает

	s_i			
$x(s)$	0	0,2113	0,7887	1
$x_2(s)$	0,9973	0,9957	0,9879	0,9873
$\overline{x_2(s)}$	1	0,9954	0,9879	0,9864

Точное решение уравнения (19) $x(s) = 1$.

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии наук СССР

Поступило
8 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig, 1913. [2] Н. Слишинский, О сходимости непрерывных дробей, Одесса, 1889. [3] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, 3, 6, 170 (1948). [4] Л. В. Канторович, Приближенные методы высшего анализа, изд. 3-е, 1949.