Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 2

МАТЕМАТИКА

В. П. ПИЛАТОВСКИЙ

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ЛАПЛАСОВЫМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 XI 1951)

1. Интегрируемая в любом конечном интервале функция $f(t)$ действительного переменного t, обращающаяся в нуль для $t<0$ и удовлетворяющая условию $|f(t)|<Me^{s_0 t}$, определяет [1], по Лапласу, изображение $F(s)$:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

$F(s)$ будет аналитической функцией от $s=x+iy$, регулярной в правой полуплоскости $\operatorname{Re}s>s_0$.

Обратный переход от заданного изображения $F(s)$ к искомому оригиналу $f(t)$ осуществляется в общем случае с помощью интеграла:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds \quad (\sigma>s_0). \tag{2}$$

Непосредственное нахождение числовых значений $f(t)$ посредством (2) не всегда возможно вследствие возникающих трудностей чисто вычислительного порядка.

Коизуми [1,2] предложил способ вычисления значений функции $f(t)$ посредством тригонометрического ряда:

$$f(t)\approx e^{\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}\sin\nu t \quad (t<t_0), \tag{3}$$

где $\nu=\frac{2n+1}{2t_0}\pi$, коэффициенты приближенно определяются алгебраически по изображению

$$b_{2n+1}=\frac{2}{t_0}\operatorname{Im}F(\lambda-i\nu)+\frac{2}{t_0}\varepsilon_n, \tag{4}$$

$$|\varepsilon_n|<\frac{e^{-\alpha t_0}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\operatorname{Im}F(\lambda-\alpha+i[\sigma-\nu])|}{|\alpha-i\sigma|}\,d\sigma \quad (\lambda-\alpha>s_0,\ \alpha>0). \tag{5}$$

Неравенство (5) приводит к сложному выражению для оценки общей погрешности приближения (3).

Ниже дано выражение (12) для суммы некоторого функционального ряда, построенного по функции $f(t)$. Эта сумма представляет собою в комплексной форме тригонометрический ряд, коэффициенты которого определяются алгебраически по дискретным значениям лапласова изображения $F(s)$ для функции $f(t)$.

Функциональный ряд (12) содержит члены $e^{-\frac{2\pi\sigma k}{\lambda}} f\left(t+\frac{2\pi k}{\lambda}\right)$. Поскольку $f(t)<Me^{s_0 t}$ и σ — произвольное положительное число, то всегда возможно добиться того, что сумма членов функционального ряда будет как угодно мало отличаться от главного члена ряда, т. е. от $f(t)$.

На этой особенности функционального ряда и основан предлагаемый способ приближенного вычисления значений функции $f(t)$, для которой известно изображение по Лапласу $F(s)$.

Справедливость разложения (12) и его основные свойства сформулированы леммой и теоремами 1 и 2.

2. Лемма. *Если функция $\varphi(t)$, интегрируемая в интервале* $(0, \infty)$ *и обращающаяся в нуль для $t<0$, порождает равномерно сходящийся в отношении t ($|t|<2\pi/\lambda$) функциональный ряд*

$$u(t)=\varphi(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(t+\frac{2\pi k}{\lambda}\right), \tag{6}$$

причем сумма $u(t)$ этого ряда в интервале $0<t<\pi/\lambda$ удовлетворяет условию Дирихле (или более общим условиям разложимости функции в ряд Фурье), тогда для $0<t<\pi/\lambda$ справедливо равенство пределов:

$$J=\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{u(t+0)+u(t-0)}{2}=\lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2N+1)\dfrac{\lambda(\tau-t)}{2}}{\sin\dfrac{\lambda(\tau-t)}{2}}\varphi(\tau)\,d\tau \tag{7}$$

(λ — *произвольное положительное число*).

Доказательство. В силу интегрируемости $\varphi(t)$ в интервале $(0, \infty)$ получим

$$J_N=\int_0^{\infty}\frac{\sin(2N+1)\dfrac{\lambda(\tau-t)}{2}}{\sin\dfrac{\lambda(\tau-t)}{2}}\varphi(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{2}{\lambda}\int_{-\lambda t/2}^{\pi/2}\frac{\sin(2N+1)\tau}{\sin\tau}\varphi\left(t+\frac{2\tau}{\lambda}\right)d\tau+\frac{2}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin(2N+1)\tau}{\sin\tau}\varphi\left(t+\frac{2\pi k}{\lambda}+\frac{2\tau}{\lambda}\right)d\tau. \tag{8}$$

В правой части (8), очевидно, имеем на основании условий леммы равномерно сходящийся в отношении τ ряд; используя (6), найдем:

$$J_N=\frac{2}{\lambda}\int_{-\lambda t/2}^{-\pi/2}\frac{\sin(2N+1)\tau}{\sin\tau}\varphi\left(t+\frac{2\tau}{\lambda}\right)d\tau+\frac{2}{\lambda}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin(2N+1)\tau}{\sin\tau}u\left(t+\frac{2\tau}{\lambda}\right)d\tau; \tag{9}$$

при $0<t<\pi/\lambda$, $-\lambda t/2>\tau>\pi/2$ имеем $\varphi(t+2\tau/\lambda)\equiv 0$. Переходя в равенстве (9) к пределу, когда $N\to\infty$, получим (7):

$$J=\lim_{N\to\infty}J_N=\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{u(t+0)+u(t-0)}{2}.$$

Если в точках $x = t + \frac{2\pi k}{\lambda}$ функция $\varphi(x)$ непрерывна, то (7) дает:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left\{\varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(t + \frac{2\pi k}{\lambda}\right)\right\} = \lim_{N\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2N+1)\frac{\lambda(\tau - t)}{2}}{\sin\frac{\lambda(\tau - t)}{2}} \varphi(\tau)\, d\tau. \quad (10)$$

Теорема 1. *Пусть аналитическая функция* $F(s)$ $(s = x + iy)$, *регулярная при* $\operatorname{Re} s > s_0$, *представляет изображение функции* $f(t)$ (1); *тогда ряд*

$$v(t) = e^{-\sigma t}\left\{f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi\sigma k}{\lambda}} f\left(t + \frac{2\pi k}{\lambda}\right)\right\}, \quad (11)$$

образующийся из (6) *подстановкой* $\varphi(t) = e^{-\sigma t} f(t)$, *при* $\sigma > s_0$ *равномерно сходится в отношении* t. *Если сумма* $v(t)$ *для* $0 < t < \pi/\lambda$ *удовлетворяет условиям Дирихле (или более общим), то при* $0 < t < \pi/\lambda$ *справедливо разложение*:

$$\frac{\lambda}{2\pi} e^{\sigma t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k t} F(\sigma + i\lambda k) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi\sigma k}{\lambda}} f\left(t + \frac{2\pi k}{\lambda}\right). \quad (12)$$

В правой части (12) *для точек разрывности вместо* $f(x)$ *необходимо брать* $^1/_2[f(x+0) + f(x-0)]$.

Доказательство. По условию, модуль оригинала удовлетворяет неравенству $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ $(s_0 > 0)$, поэтому, мажорируя ряд (11), имеем:

$$|v(t)| < Me^{-(\sigma - s_0)t} \frac{1}{1 + e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(\sigma - s_0)}}.$$

Таким образом, ряд (11) относительно t сходится равномерно. Полагаем $s = \sigma + i\lambda k$ и, на основании (1), составляем сумму:

$$e^{\sigma t} \sum_{k=-N}^{N} e^{i\lambda k t} F(\sigma + i\lambda k) = e^{\sigma t} \int_0^{\infty} \frac{e^{iN\lambda(\tau - t)} - e^{-i(N+1)\lambda(\tau - t)}}{1 - e^{-i\lambda(\tau - t)}} e^{-\sigma\tau} f(\tau)\, d\tau =$$

$$= e^{\sigma t} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2N+1)\frac{\lambda(\tau - t)}{2}}{\sin\frac{\lambda(\tau - t)}{2}} e^{-\sigma\tau} f(\tau)\, d\tau. \quad (13)$$

Поскольку $e^{-\sigma\tau} f(\tau)$ удовлетворяет условиям леммы, можно в равенстве (13) перейти к пределу при $N \to \infty$, вместо функции $u(t)$ нужно взять $v(t)$. После очевидных упрощений придем к равенству (12).

Теорема 2. *Если* $f(t)$ *и* $F(s)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1, *то при* $0 < t < \pi/\lambda$ *справедливо разложение*:

$$\frac{\lambda}{\pi} e^{\sigma t} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=2m+1}}^{\infty} e^{i\lambda k t} F(\sigma + i\lambda k) = f(t) + \sum_{k=1,2,3}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{\pi\sigma k}{\lambda}} f\left(t + \frac{\pi k}{\lambda}\right). \quad (14)$$

В правой части (14) *для точек разрывности вместо* $f(x)$ *необходимо брать* $^1/_2[f(x+0) + f(x-0)]$.

Доказательство. Определим функцию $\psi(t)$ так:

$$
\begin{aligned}
-\infty < t < 0 \quad & \psi(t) \equiv 0; \\
0 \leqslant t < \frac{\pi}{\lambda} \quad & \psi(t) = f(t); \\
\frac{\pi}{\lambda} \leqslant t < \infty \quad & \psi(t) = f(t) - e^{\pi\sigma/\lambda} f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Нетрудно проверкой убедиться в том, что изображением функции $\psi(t)$ будет

$$
\Psi(s) = F(s)\left[1 - e^{-\frac{\pi}{\lambda}(s-\sigma)}\right]. \tag{16}
$$

Функции $\psi(t)$ и $\Psi(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, поэтому имеем:

$$
\Psi(\sigma + i\lambda k) = \begin{cases} 0 & \text{для четных значений } k, \\ 2F(\sigma + i\lambda k) & \text{для нечетных значений } k. \end{cases} \tag{17}
$$

Правую часть (12) при подстановке $\psi(t)$ можно привести к выражению:

$$
\psi(t) + \sum_{k=1,\,2,\,3}^{\infty} e^{-2\pi\sigma k/\lambda} \psi\left(t + \frac{2\pi k}{\lambda}\right) = f(t) + \sum_{k=1,\,2,\,3}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi\sigma k/\lambda} f\left(t + \frac{\pi k}{\lambda}\right). \tag{18}
$$

На основании (17) и (18), таким образом, доказано разложение (14).

Поступило
17 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Лурье, Операционное исчисление в приложениях к задачам механики, 1938. [2] Koisumi, Phil. Mag., (7), 19, 1061 (1935). [3] В. А. Диткин и П. Н. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, 1951.