Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. Н. ОЛЕВСКИЙ

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 XI 1951)

В ряде вопросов может оказаться целесообразным заменить заданную на определенном интервале непрерывную функцию надлежащим образом подобранной кусочно-линейной функцией. Ниже мы, пользуясь элементарными средствами, рассматриваем эту задачу для функций со знакопостоянной второй производной.

§ 1. Приближения по Чебышеву.

1. Пусть $f(x)$ — заданная на сегменте $[a, b]$ непрерывная выпуклая* функция (кривая AB — ее график), $y = \varphi_n(x)$ — уравнение n-звенной ломаной $\overline{P_0P_1\ldots P_n}$ на $[a, b]$ с вершинами в точках $P_0, P_1, \ldots, P_n$ (абсциссы точек P_0 и P_n суть, соответственно, a и b) и

$$\Delta[f(x), \varphi_n(x)] = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - \varphi_n(x)|$$

отклонение функции $\varphi_n(x)$ от $f(x)$ на $[a, b]$ (иначе: $\Delta[AB, \overline{P_0P_1\ldots P_n}]$ — отклонение ломаной $\overline{P_0P_1\ldots P_n}$ от кривой AB).

Пусть S_n — данное семейство m-звенных ($m \leqslant n$, n — фиксированное число) ломаных на $[a, b]$. Ломаную $L_n \in S_n$, для которой отклонение $\Delta[AB, L_n]$ (или, короче, $\delta(L_n)$) равно

$$\delta(L_n) = \inf_{\overline{P_0\ldots P_n} \in S_n} \Delta[AB, \overline{P_0\ldots P_n}],$$

мы будем называть наилучшей по Чебышеву (в семействе S_n) для кривой AB на $[a, b]$.

2. Задача $\mathcal{A}$. *Из всех n-звенных ломаных (с концами в точках A и B), вписанных в кривую AB, найти наилучшую по Чебышеву.*

Искомая ломаная $\mathcal{A}_n \equiv \overline{AA_1\ldots A_{n-1}B}$, если она существует, должна иметь на сегментах, отвечающих отдельным ее звеньям, равные между собой отклонения $\delta(\mathcal{A}_n)$, т. е. $\Delta[AA_1, \overline{AA_1}] = \Delta[A_1A_2, \overline{A_1A_2}] = \cdots = \Delta[A_{n-1}B, \overline{A_{n-1}B}] \equiv \delta(\mathcal{A}_n)$.

В противном случае надлежащим сдвигом одной или нескольких вершин можно было бы получить ломаную, имеющую на $[a, b]$ меньшее отклонение от кривой AB.

При $n = 2$ искомая ломаная $\mathcal{A}_2 \equiv \overline{AA_1B}$, очевидно, существует и единственна, поскольку при фиксированных точках A и B $\Delta[AA_1, \overline{AA_1}]$ есть непрерывная возрастающая, а $\Delta[A_1B, \overline{A_1B}]$ — непрерывная убы-

* Мы предполагаем, для простоты, что $f(x)$ — дважды дифференцируемая на $[a, b]$ функция и, следовательно, отождествляем условие выпуклости с условием $f''(x) < 0$. Все рассуждения в статье очевидным образом переносятся на случай вогнутых функций.

вающая функции абсциссы точки A_1. Для $n > 2$ существование и единственность $\mathcal{A}_n$ обнаруживаются методом индукции.

3. Задача $\mathcal{B}$. *Из всех n-звенных ломаных на* $[a, b]$ *найти наилучшую по Чебышеву для кривой AB.*

Искомая ломаная $\mathcal{B}_n$ получается из $\mathcal{A}_n$ сдвигом последней в направлении положительной оси y на расстояние, равное $^1/_2\delta(\mathcal{A}_n)$.

Это утверждение легко вытекает из того, что каждое звено ломаной $\mathcal{B}_n$ на своем интервале является наилучшим по Чебышеву линейным приближением для соответствующего участка кривой.

4. Задача $\mathcal{C}$. *Из всех n-звенных ломаных на* $[a, b]$, *описанных около кривой AB, найти наилучшую по Чебышеву.*

Искомая ломаная $\mathcal{C}_n$ получается из $\mathcal{A}_n$ сдвигом последней в направлении положительной оси y на расстояние, равное $\delta(\mathcal{A}_n)$.

Как и выше, доказательство вытекает из того, что каждое звено ломаной $\mathcal{C}_n$ является наилучшим по Чебышеву линейным приближением на соответствующем участке среди всех прямых, касающихся кривой на нем.

5. Имея в виду различные возможные применения, отметим еще следующие две задачи:

Задача $\mathcal{D}$. *Из всех n-звенных ломаных на* $[a, b]$, *проходящих через точку A, найти наилучшую по Чебышеву для кривой AB.*

Характеристическим свойством искомой ломаной $\mathcal{D}_n$ является то, что число точек на сегменте $[a, b]$, в которых разность ординаты кривой AB и ординаты ломаной $\mathcal{D}_n$ достигает (знакочередуясь) по абсолютной величине одного и того же значения, равного отклонению этой ломаной от AB на $[a, b]$, строго равно $2n$.

Ломаная $\mathcal{D}_n$ существует и единственна. В самом деле, возьмем на AB произвольную точку K. Пусть $\delta_1 \equiv \Delta[AK, \overline{AK_1}]$ — отклонение наилучшей по Чебышеву (среди прямых, проходящих через точку A) прямой AK_1 от кривой AK и $\delta_2 \equiv \Delta[KB, \overline{K_1'D_2 \ldots D_{n-1} D_n}]$ — отклонение наилучшей по Чебышеву $(n-1)$-звенной ломаной (см. п. 2) от кривой KB (K, K_1, K_1' имеют одну и ту же абсциссу). δ_1 есть непрерывная возрастающая, а δ_2 — непрерывная убывающая функция абсциссы точки K. В силу этого существует единственное положение $\overline{K}$ точки K, когда соответствующие числа δ_1 и δ_2 станут равными между собою (при этом очевидно, что $\overline{K}_1 \equiv \overline{K}_1'$); доказательство того, что таким образом получающаяся ломаная осуществляет необходимый минимум, проводится так же, как и в п. 3.

6. Задача $\mathcal{E}$. *Из всех n-звенных ломаных на* $[a, b]$, *проходящих через точки A и B, найти наилучшую по Чебышеву для кривой AB.*

Решается аналогично задаче $\mathcal{D}$. Здесь число точек, о которых шла речь в п. 5, должно быть строго равно $2n - 1$.

7. Приведем оценки для приближений, осуществляемых ломаными $\mathcal{A}_n - \mathcal{E}_n$. Достаточно это сделать для ломаной $\mathcal{A}_n$, поскольку

$$\delta(\mathcal{B}_n) < \delta(\mathcal{D}_n) < \delta(\mathcal{E}_n) < \delta(\mathcal{A}_n) = \delta(\mathcal{C}_n) = 2\delta(\mathcal{B}_n).$$

Имеет место следующая не допускающая снижения оценка:

$$\delta(\mathcal{A}_n) \leqslant \frac{(b-a)^2}{8n^2} M_2, \tag{1}$$

где M_2 — максимум модуля $f''(x)$ на $[a, b]$.

Оценка (1) в точности достигается для функции

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C. \tag{2}$$

8. Для каких функций $f(x)$ ломаная $\mathcal{A}_n$ (а следовательно, $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{C}_n$) на любом интервале имеет равные проекции всех ее звеньев? Можно

показать, что это свойство является характеристичным для функции (2). Дело сводится к доказательству того, что функциональное уравнение

$$f'\left(a+\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{f'(a+h)-f'(a)}\right)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(которое должно иметь место при любых $h \neq 0$ и a) имеет своим решением лишь функцию (2) при произвольных $A \neq 0$, B и C.

§ 2. Приближения в среднем (первой степени).

1. Пусть $y=S_n(x;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — уравнение семейства n-звенных ломаных на интервале $[a,\ b]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — параметры семейства. Мы будем называть ломаную из этого семейства, которая сообщает наименьшее значение интегралу

$$J(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)=\int\limits_a^b |f(x)-S_n(x;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k)|\,dx,$$

наилучшей в среднем для функции $f(x)$ на $[a,\ b]$.

В этом параграфе мы рассматриваем задачи, аналогичные изученным в § 1, но с точки зрения приближения в среднем. Назовем их задачами $\mathcal{A}'-\mathcal{E}'$, а отвечающие им ломаные обозначим через $\mathcal{A}'_n-\mathcal{E}'_n$, абсциссы же их вершин, соответственно, через $a'_i, \ldots, e'_i$ $(i=1,\ 2, \ldots, n-1)$. Соответствующие значения интегралов J будем обозначать через $J(\mathcal{A}'_n), \ldots, J(\mathcal{E}'_n)$.

2. Задача $\mathcal{A}'$. Рассматривая задачу на минимум соответствующего интеграла, приходим к следующему результату: *вершины $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$ ломаной $\mathcal{A}'_n$ образуют такую систему точек на кривой AB, что касательная в точке A'_i $(i=1,\ 2, \ldots, n-1)$ параллельна хорде $A'_{i-1}A'_{i+1}$ $(A'_0 \equiv A,\ A'_n \equiv B)$.*

Легко показать, что решения соответствующей системы уравнений относительно a'_i, в силу выпуклости функции $f(x)$, существуют и единственны на $(a,\ b)$.

3. Задача $\mathcal{B}'$. *Для $n=1$ можно показать, что искомая прямая проходит через точки C и D кривой AB, проекции которых на ось x делят интервал $(a,\ b)$ в отношении $1:3$ и $3:1$.*

Пусть $n>1$. Обозначая абсциссы точек встречи i-го звена искомой ломаной $\mathcal{B}'_n$ с кривой AB через η_{2i-1}, η_{2i}, а абсциссы точек встречи звеньев через $b'_1, \ldots, b'_{n-1}$, мы приходим к тому, что

$$4\eta_{2i-1}=3b'_{i-1}+b'_i,\quad 4\eta_{2i}=b'_{i-1}+3b'_i\quad (i=1, \ldots, n);\ b'_0\equiv a,\ b'_n\equiv b$$

и

$$3[f(\eta_{2i-1})-f(\eta_{2i-2})]=f(\eta_{2i})-f(\eta_{2i-3})\quad (i=2, \ldots, n). \tag{3}$$

Система (3), в силу выпуклости функции $f(x)$, однозначно определяет $b'_1, \ldots, b'_{n-1}$ на $(a,\ b)$.

4. Задача $\mathcal{C}'$. *Пусть $n=1$. Соответствующий минимум, как легко видеть, осуществляется, если абсцисса точки касания искомой прямой с кривой AB будет равна $^1/_2(a+b)$.*

При $n>1$, обозначая через ζ_i $(i=1, \ldots, n)$ абсциссу точки касания i-го звена ломаной $\mathcal{C}'_n$ с кривой AB, мы приходим к тому, что

$$2\zeta_i=c'_{i-1}+c'_i\quad (i=1, \ldots, n),\quad c'_0\equiv a,\quad c'_n\equiv b$$

и

$$f(\zeta_i)+(c'_i-\zeta_i)f'(\zeta_i)=f(\zeta_{i+1})+(c'_i-\zeta_{i+1})f'(\zeta_{i+1})\quad (i=1, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Решения системы (4) относительно c'_i существуют и единственны на (a, b).

5. Задача $\mathscr{D}'$. *При $n=1$ искомая прямая, проходящая через точку A, должна иметь второе пересечение с кривой AB в точке, абсцисса которой делит (a, b) в отношении $1:(\sqrt{2}-1)$.*

При $n>1$, обозначая через ξ_1 абсциссу второго пересечения крайнего звена $\mathscr{D}'_n$ (проходящего через точку A) с кривой AB, а через η_{2i-1}, η_{2i} $(i=2,\ldots, n)$ абсциссы точек встречи i-го звена $\mathscr{D}'_n$ с кривой AB, мы получаем

$$\sqrt{2}\xi_1=(\sqrt{2}-1)a+d'_1;\quad 4\eta_{2i-1}=3d'_{i-1}+d'_i;\quad 4\eta_{2i}=d'_{i-1}+3d'_i;\ d'_n=b,$$

а для определения d'_i систему

$$2[(\sqrt{2}-1)f(a)-\sqrt{2}f(\xi_1)]=f(\eta_4)-3f(\eta_3), \tag{5}$$

$$3[f(\eta_{2i-1})-f(\eta_{2i-2})]=f(\eta_{2i})-f(\eta_{2i-3})\quad (i=3,\ldots, n), \tag{6}$$

допускающую единственные решения в (a, b).

6. Задача $\mathscr{E}'$. Сохраняя, в применении к $\mathscr{E}'_n$, за ξ_1 и η_{2i-1}, η_{2i} $(i=2, \ldots, n-1)$ тот же смысл, что и в п. 5, и обозначая через ξ_2 абсциссу точки второй встречи крайнего звена $\mathscr{E}'_n$, проходящего через точку B, с кривой AB, мы имеем:

$$\sqrt{2}\xi_1=(\sqrt{2}-1)a+e'_1,\quad \sqrt{2}\xi_2=(\sqrt{2}-1)b+e'_{n-1},$$
$$4\eta_{2i-1}=3e'_{i-1}+e'_i,\quad 4\eta_{2i}=e'_{i-1}+3e'_i$$

и систему уравнений (при $n>2$) для e'_i, состоящую из уравнения (5), уравнений (6) при $i=3, \ldots, n-1$ и уравнения

$$f(\eta_{2n-3})-3f(\eta_{2n-2})=2[(\sqrt{2}-1)f(b)-\sqrt{2}f(\xi_2)] \tag{7}$$

(при $n=2$ уравнение для e'_1 таково: $(\sqrt{2}-1)[f(a)-f(b)]=\sqrt{2}[f(\xi_1)-f(\xi_2)]$), однозначно определяющую e'_i в (a, b).

7. Имеют место следующие оценки:

$$J(\mathscr{D}'_n)<J(\mathscr{E}'_n)<J(\mathscr{A}'_n)<2k_n,\quad J(\mathscr{B}'_n)<J(\mathscr{C}'_n)<k_n,\quad 24n^2k_n=(b-a)^3M_2.$$

8. Для каких функций $f(x)$ ломаная $\mathscr{A}'_n$ (а также $\mathscr{B}'_n$ и C'_n) будет иметь равные между собой проекции всех своих звеньев (при произвольных a и b)? Легко убедиться, что и здесь это имеет место лишь для квадратичной параболы (2).

Замечания к §§ 1—2. 1) Если произвольно задать внутри $[a, b]$ числа $\alpha_1<\ldots<\alpha_{n-1}$ и построить для $f(x)$ надлежащие наилучшие линейные приближения в каждом из интервалов $a\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}b$ (по Чебышеву или, соответственно, в среднем с учетом ограничений, налагаемых на семейство, в котором ищется соответствующая ломаная), то полученная таким образом кусочно-линейная функция будет, вообще говоря, разрывной при $x=\alpha_i$. В силу пп. 3—6 для каждой задачи $\mathscr{B}, \ldots, \mathscr{E}, \mathscr{B}', \ldots, \mathscr{E}'$ существует лишь одна система чисел α_i, для которой соответствующая кусочно-линейная функция является непрерывной на $[a, b]$. Последняя и будет осуществлять в каждом случае необходимый минимум.

2) Ввиду того, что решение системы уравнений относительно координат вершин искомых ломаных может представить значительные трудности, существенно отметить, что здесь могут быть даны методы последовательных приближений к ним.

Поступило
16 X 1951