

Л. Я. НЕЙШУЛЕР

**О ТРЕХЧЛЕННОМ РАЗЪЕДИНЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ
В УРАВНЕНИИ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 19 XI 1951)

Гурса дал необходимое и достаточное условие разъединяемости переменных в уравнении с четырьмя переменными

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad (1)$$

т. е. условие, которому должна удовлетворять функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, чтобы уравнение (1) было равносильно уравнению вида

$$f_1(x_i, x_j) = f_2(x_p, x_q) \quad (2)$$

(i, j, p, q здесь, как и в дальнейшем, какая-нибудь перестановка индексов 1, 2, 3, 4), или, что то же, вида

$$x_q = \varphi_2[\varphi_1(x_i, x_j), x_p]. \quad (3)$$

Вопрос о возможности разъединения переменных в уравнении (1) возникает при построении составной номограммы для уравнения (1).

Если уравнение (1) равносильно некоторому уравнению вида (3), то можно построить такую двухчленную таблицу для функции трех переменных $x_q = \varphi_2[\varphi_1(x_i, x_j), x_p]$, которая обладает свойством полной «обратимости», т. е. позволяет находить значения любого из четырех переменных по значениям остальных трех.

Такое разъединение переменных, которое позволяет уравнение (1) заменять равносильным ему уравнением вида (3), будем называть двухчленным.

Разъединение переменных в уравнении (1), которое позволяет заменить его равносильным ему уравнением $x_q = \varphi(x_i, x_j, x_p)$, в котором функция трех переменных $\varphi(x_i, x_j, x_p)$ трехчленно-табулируемая, т. е. представляет собой суперпозицию трех функций двух переменных, будем называть трехчленным. Такое разъединение позволяет заменять уравнение (1) эквивалентной ему системой трех уравнений, каждое с тремя неизвестными.

В настоящей статье мы рассмотрим вопрос об условиях трехчленного разъединения переменных в уравнении (1).

Легко убедиться, что это сводится к вопросу об условиях, которым должна удовлетворять функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, чтобы уравнение (1) было равносильно некоторому уравнению вида

$$f_3[f_1(x_i, x_j), f_2(x_i, x_p), x_q] = 0. \quad (4)$$

Теорема. Для того чтобы уравнение $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ было равносильно некоторому уравнению вида (4), необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись четыре уравнения четвертого порядка:

$$1) \frac{\partial A}{\partial x_p} = 0; \quad 2) \frac{\partial A}{\partial x_q} = 0; \quad 3) \frac{\partial B}{\partial x_j} = 0; \quad 4) \frac{\partial B}{\partial x_q} = 0,$$

где

$$A = \frac{\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial A_{ip}}{\partial x_j} : A_{jp} \right)}{\frac{\partial^2 \ln(A_{jp})}{\partial x_j \partial x_p}}, \quad B = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_p} : A_{pj} \right)}{\frac{\partial^2 \ln(A_{pj})}{\partial x_j \partial x_p}},$$

$$A_{mn} = \frac{\partial f}{\partial x_m} : \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Достаточность этих условий вытекает из того, что при удовлетворении их можно построить представление

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_3[f_1(x_i, x_j), f_2(x_i, x_p), x_q], \quad (5)$$

определив функции $f_1(x_i, x_j)$ и $f_2(x_i, x_p)$ как интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений. А именно, в качестве $f_1(x_i, x_j)$ можно принять любой интеграл уравнения $A dx_i + dx_j = 0$, а в качестве $f_2(x_i, x_p)$ — любой интеграл уравнения $B dx_i + dx_p = 0$, где A и B — те же, что в условиях нашей теоремы.

Если же для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ имеет место представление (4), то уравнение (1) будет равносильно уравнению

$$f_3[f_1(x_i, x_j), f_2(x_i, x_p), x_q] = 0, \quad (6)$$

что и доказывает достаточность.

Пусть уравнение (1) равносильно некоторому уравнению вида (6). Перепишем уравнение (1) в форме

$$\varphi(x_i, x_j, x_p, z) = 0 \quad (7)$$

и, соответственно, равносильное ему уравнение (6) в форме

$$\psi[f_1(x_i, x_j), f_2(x_i, x_p), z] = 0 \quad (8)$$

и будем в (7) и (8) рассматривать z как функцию трех переменных x_i, x_j, x_p .

Решив (8) относительно z , будем иметь

$$z(x_i, x_j, x_p) = \eta[f_1(x_i, x_j), f_2(x_i, x_p)]. \quad (9)$$

Легко убедиться, что из представления (9) следует

$$\alpha_1(x_i, x_j) \frac{\partial z}{\partial x_j} - \frac{\partial z}{\partial x_i} + \alpha_2(x_i, x_p) \frac{\partial z}{\partial x_p} = 0, \quad (10)$$

где

$$\alpha_1(x_i, x_j) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial \alpha_{ip}}{\partial x_j} : \alpha_{jp} \right)}{\frac{\partial^2 \ln(\alpha_{jp})}{\partial x_j \partial x_p}}, \quad \alpha_2(x_i, x_p) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \alpha_{ip}}{\partial x_p} : \alpha_{pj} \right)}{\frac{\partial^2 \ln(\alpha_{pj})}{\partial x_j \partial x_p}},$$

$$\alpha_{mn} = \frac{\partial z}{\partial x_m} : \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Продифференцировав (7) по x_i , x_j и x_p , получим:

$$1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0; \quad 2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_j} = 0; \quad 3) \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_p} = 0;$$

прибавив третье из этих равенств, умноженное на $\alpha_2(x_i, x_p)$, к разности между вторым равенством, умноженным на $\alpha_1(x_i, x_j)$, и первым, получим

$$\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_p} = 0,$$

или

$$\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} \alpha_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\alpha_1 \frac{\partial z}{\partial x_j} - \frac{\partial z}{\partial x_i} + \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial x_p} \right) = 0. \quad (11)$$

Если существует представление (9) и, следовательно, имеет место (10), то, согласно (11), имеет место и

$$\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} = 0. \quad (12)$$

(12) можно переписать в виде $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}$, или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} : \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} = \alpha_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} : \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} \right) + \alpha_2. \quad (13)$$

Введя обозначения $\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} : \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \beta_{mn}$ и дифференцируя обе части (13) по x_j , получим

$$\frac{\partial \beta_{ip}}{\partial x_j} = \frac{\partial \beta_{jp}}{\partial x_j} \alpha_1 + \beta_{jp} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j}. \quad (14)$$

Разделив обе части (14) на β_{ip} , получим

$$\frac{\partial \beta_{ip}}{\partial x_j} : \beta_{ip} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j} \ln(\beta_{jp}) \right] \alpha_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j}. \quad (15)$$

Дифференцируя (15) по x_p , получим

$$\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial \beta_{ip}}{\partial x_j} : \beta_{ip} \right) = \frac{\partial^2 \ln(\beta_{jp})}{\partial x_j \partial x_p} \alpha_1$$

или

$$\alpha_1(x_i, x_j) = \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial \beta_{ip}}{\partial x_j} : \beta_{ip} \right) : \left[\frac{\partial^2 \ln(\beta_{jp})}{\partial x_j \partial x_p} \right].$$

Точно так же из (12) можно получить, что

$$\alpha_2(x_i, x_p) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial x_p} : \beta_{pj} \right) : \left[\frac{\partial^2 \ln(\beta_{pj})}{\partial x_j \partial x_p} \right].$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, мы, очевидно, получим условия нашей теоремы, т. е. будет доказана необходимость наших условий. Выполнение этих условий предполагается для тех систем (x_1, x_2, x_3, x_4) , для которых выполняется (1).

Можно показать, что условия нашей теоремы являются необходимыми и достаточными для существования у функции четырех переменных $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ представления вида

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_3[f_1(x_i, x_j), f_2(x_i, x_p), x_q]. \quad (16)$$

Следовательно, нашей теореме можно еще дать и такую формулировку:

Для того чтобы уравнение (1) допускало трехчленное разделение переменных, достаточно и необходимо существование для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ представления вида (16).

В заключение укажем, что на основе двухчленного разделения переменных и уравнения с четырьмя переменными (1) можно строить составные номограммы и двухчленные табличные конструкции, решающие уравнение (1) относительно любого из четырех переменных.

Если же уравнение (1) с четырьмя переменными не допускает двухчленного разделения, а лишь трехчленное, то на его основе можно строить номограммы и трехчленные табличные конструкции, решающие уравнение (1) только относительно переменных, которые в соответствующем представлении для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не повторяются под знаком разных функций. Так, на основе (9), равносильного (1), можно построить трехчленную таблицу, решающую уравнение (1) лишь относительно x_i, x_p и z (или x_q).

Несмотря на это ограничение, возможность лишь трехчленного разделения переменных также представляет практический интерес.

Поступило
9 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Bull. Soc. math. de France, **27** (1908).