

Н. МЕИМАН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ  
ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 1 XI 1951)

1°. В исследованиях, связанных с обобщением известного неравенства С. Н. Бернштейна для целых функций, основным является явно или неявно сформулированное понятие подчиненности (мажорантности) между функциями. Выбор того или иного определения подчиненности (мажорантности) влечет большую или меньшую обширность класса функций, на которые распространяются доказываемые неравенства, и ту или иную степень сложности доказательств. В настоящей заметке мы пользуемся тем же понятием подчиненности, что и в работе (1), но переносим его на аналитические функции с изолированными особенностями.

2°. Определение 1. Классом  $E$  называется совокупность однозначных аналитических во всей плоскости функций с изолированными особыми точками, удовлетворяющих неравенству

$$|F(\bar{z})/F(z)| < 1 \quad \text{при } \text{Im } z < 0. \quad (1)$$

Произведение двух функций класса  $E$  входит в  $E$ . Функция, предельная для последовательности из  $E$  и имеющая только изолированные особенности, либо принадлежит  $E$ , либо с точностью до постоянного множителя — вещественная функция, т. е. принимает вещественные значения на вещественной оси.

В записи  $f(z) = g(z) + ih(z)$  понимается, что компоненты  $g(z)$  и  $h(z)$  суть вещественные аналитические функции. Под  $\bar{f}(z)$  понимается  $g(z) - ih(z)$ . Очевидно,  $\bar{f}(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ . Пусть  $F(z) = u(z) + iv(z) \in E$ . Из неравенства (1) следует монотонное возрастание  $\arg F(x)$  вдоль интервалов вещественной оси, не содержащих особых точек функции  $F(z)$ , и строгое неравенство  $v'u - u'v > 0$  в точках, где  $|F(x)|^2 = u^2(x) + v^2(x) \neq 0$ . Поэтому:

*Вещественные нули производной функции класса  $E$  суть кратные нули функции.*

Определение 2. Однозначная аналитическая во всей плоскости функция  $f(z)$  с изолированными особенностями называется подчиненной функции  $F(z)$  такой же аналитической природы относительно нижней полуплоскости, если выполняются неравенства

$$|f(z)/F(z)| \leq 1, \quad |\bar{f}(\bar{z})/F(z)| \leq 1 \quad \text{при } \text{Im } z < 0. \quad (2)$$

В классе  $E$  естественно выделить подкласс  $M$  и  $G$  всех входящих в него мероморфных и целых функций. Особенно существенное зна-

чение имеет подкласс  $NB(\overline{NB})$  целых функций, не имеющих нулей в замкнутой (открытой) нижней полуплоскости. В классе  $NB$  (соответственно  $\overline{NB}$ ) выделяются подклассы:  $NB1_\infty$  — функций роста не выше первого порядка максимального типа;  $NB1$  — функций роста не выше первого порядка среднего типа;  $NB1_\sigma$  — роста не выше первого порядка типа  $\sigma$ .

Особенно важен подкласс  $NB1^*$  функций вида  $e^{-\gamma z^2} \omega(z)$ , где  $\gamma \geq 0$ , а род  $\omega(z)$  не больше единицы, так как  $NB1^*$  является замыканием совокупности полиномов с нулями в верхней полуплоскости (см., например, (2), гл. III, § 11 и теорему IV. 11), поэтому  $NB1^*$  инвариантен относительно дифференцирования ((2), гл. III, § 11)\*.

Очевидно,  $E \supset M \supset G \supset NB \supset NB1^* \supset NB1_\infty \supset NB1$ .

Можно показать, что мероморфная функция  $\Phi(z)$  класса  $M$ , все нули которой лежат в верхней, а полюса — в нижней полуплоскости, может быть представлена в виде дроби  $\Phi(z) = F_1(z) / \bar{F}_2(z)$ , где  $F_1$  и  $F_2$  из  $NB$ .

Принадлежность целой функции  $F(z) = u(z) + iv(z)$  классу  $NB$  в предположении отсутствия общих нулей у компонент  $u(z)$  и  $v(z)$  эквивалентна принадлежности мероморфной функции  $v(z)/u(z)$  классу  $R$ , элементы которого характеризуются неравенством  $\text{Im } R(z) / \text{Im } z > 0$ . Громмер (6) решил проблему коэффициентов для класса  $R$ . Исследования Громмера были дополнены Н. Г. Чеботаревым (7) и М. Г. Крейнном (8) и упрощены нами (9,2). Крейну принадлежит также видоизменение канонического представления функций класса  $NB$ .

Теоретико-функциональные свойства класса  $NB$  и более общего класса  $B$  ( $|F(z)/F(z)|$  ограничено при  $z \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } z \leq 0$ ) изучены в наших работах (12,2)\*\*. В частности, было доказано, что класс  $B$  (и  $NB$ ) вполне характеризуется тем, что число корней функции  $F(z) = u(z) + iv(z)$  класса  $B$ , лежащих в нижней полуплоскости, определяется через числа комплексных корней компонент  $u(z)$  и  $v(z)$  и взаимным расположением их вещественных корней точно так же, как и для полиномов.

3°. Теорема 1. Пусть  $F(z) \in E$  и функция  $f(z)$  подчинена функции  $F(z)$ ; тогда при  $|t| < 1$  функция  $F_t(z) = F(z) - tf(z) \in E$ .

Доказательство. Числитель отношения

$$\left| \frac{F_t(z)}{F_t(z)} \right| = \left| \frac{\bar{F}_t(z)}{\bar{F}_t(z)} \right| = \frac{|\bar{F}_t(z)/F(z) - \bar{t}f(z)/F(z)|}{|1 - tf(z)/F(z)|}$$

\* Неравенство С. Н. Бернштейна было в различных направлениях обобщено Б. Я. Левиным (3,4) на класс  $\overline{NB1}$  — в терминологии Левина класс  $P$ . Определение Б. Я. Левина класса  $P$  отличается от нашего; в частности, непосредственно из него не следует, что  $P$  — полугруппа и замкнуто. Это определение не обобщается на произвольные целые функции, не говоря уже о функциях более сложной природы, как, например, класс  $E$ . Наконец, это определение не переносится на функции от нескольких переменных, что автоматически имеет место для нашего определения. В последних работах (5) Б. Я. Левин пользуется нашим определением класса  $NB$  и нашим определением понятия подчиненности (мажорантности).

\*\* Недавно появилась работа Е. Вигнера (10) по  $R$ -функциям. Все теоремы этой работы, не относящиеся к некоторым специальным классам  $R$ -функций, вероятно, наиболее интересным для приложений в квантовой механике, содержатся в работах Громмера, Чеботарева и автора настоящей заметки. Таковы все теоремы раздела II и частично IV. Основная теорема II 8 (Вигнер приписывает ее Шифферу и Бергману) — это давно известная теорема Громмера — Чеботарева (теорема V. 1 в (2)), лемма II 8<sub>1</sub>, приписываемая Шифферу, содержится в нашей работе (11) (лемма 1, гл. V в (2)), теорема II 12, приписываемая Нейману, содержится в несколько отличной форме в нашей работе (11) и т. д.

ограничен при  $\text{Im } z < 0$ , а знаменатель больше  $1 - |t| > 0$ . Согласно теореме Линделефа, это отношение  $\leq 1$ . Знак равенства исключается, так как при  $t = 0$   $F_t(z) \in E^*$ .

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(z)$  подчинена функции  $F(z)$  класса  $E$ ; тогда вдоль вещественной оси  $|f'(x)| \leq |F'(x)|$  и выполняются неравенства

$$|FF'| \sin \beta + |ff'| \sin \gamma \geq |\overline{F}f' - f\overline{F}'|, \quad (3)$$

$$(k \cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta)^2 \leq (1 - k^2) \sin^2 \alpha, \quad (4)$$

где  $k = |f'(x)/F'(x)|$ ,  $\cos \alpha = |f(x)/F(x)|$ ,  $\beta = \arg F'(x) - \arg F(x)$ ,  $\gamma = \arg f'(x) - \arg f(x)$ .

**Доказательство.** При  $0 < \rho < 1$  функция  $F(z) - \rho e^{i\psi} f(z) \in E$ , и ее аргумент возрастает вдоль вещественной оси. Применяя теорему 2 из (1) и заставляя  $\rho \rightarrow 1$ , получим (3) и (4).

**Примечание 1.** В точках, в которых  $f'(x)/f(x)$  вещественно, в зависимости от положительности или отрицательности этой величины

$$|f'(x)| \leq \cos(\beta - \alpha) |F'(x)| \text{ или } |f'(x)| \leq -\cos(\beta + \alpha) |F'(x)|. \quad (5)$$

**Примечание 2.** Равенство  $|f'| = |F'|$  имеет место только в таких точках  $\xi$ , в которых функция  $F(z) - ie^{-i\psi} f(z)$ , где  $\psi = \arg [\overline{F}(\xi) f'(\xi) - f(\xi) \overline{F}'(\xi)]$ , либо имеет кратный корень, либо сводится с точностью до постоянного множителя к вещественной функции.

Так как функции  $f(z)$  и  $\overline{f}(z)$  равноправны, то нужно присоединить еще точки, в которых указанные соотношения получаются при замене  $f(z)$  на  $\overline{f}(z)$ .

Если  $F(z) = u(z) + iv(z)$ ,  $f(z) = g(z) + ih(z)$ , то из (3) следует

$$v'u - u'v > |h'g - g'h|.$$

**Примечание 3.** Если мажоранта  $F(z) \in \overline{HB}1^*$ , то условия теоремы при дифференцировании, очевидно, воспроизводятся, и получаются неравенства для производных всех порядков.

**Примечание 4.** Для целых функций экспоненциального типа условия мажорантности Б. Я. Левина<sup>(3,4)</sup> состоят в том, что  $F(z) \in \overline{HB}1$ ,  $|f(x)| \leq |F(x)|$ ,  $z = x + iy$ , и тип функции  $f(z)$  не больше типа функции  $F(z)$ . В заметке<sup>(1)</sup> показано, что из одной теоремы М. Каррарит<sup>(13)</sup>, теорема III) для функций экспоненциального типа следует равносильность этого определения с нашим определением подчиненности.

**Теорема 3.** Пусть при всех  $|t| < 1$  функция  $F_t = F - tf \in E$ ; тогда при  $\text{Im } z \leq 0$   $|f(z)| \leq |F(z)|$ . Если знак равенства имеет место в точке  $\text{Im } z < 0$ , то  $f(z) = e^{i\psi} F(z)$ .

**Доказательство.** Пусть в точке  $z_0$   $\text{Im } z_0 < 0$ ,  $|f(z_0)| > |F(z_0)|$ . Неравенство выполняется в некотором кружке  $|z_1 - z_0| < \varepsilon$ , лежащем в нижней полуплоскости. Положим  $t = \overline{F}(z_1)/f(z_1)$ , тогда  $F_t(z_1) = 0$ . Так как  $F_t(z) \in E$ , то одновременно  $\overline{F}_t(z_1) = 0$ . Из этих равенств следует, что  $\overline{F}(z_1)/f(z_1) = \overline{F}(z_1)/\overline{f}(z_1)$ . Так как это равенство выполняется во всей окрестности точки  $z_0$ , то  $\overline{F}(z)/\overline{f}(z) = c$ , где  $c$  — константа. Из  $|f(z_0)| > |F(z_0)|$  следует  $|c| < 1$  и  $F_c(z) \equiv 0$  и не принадлежит  $E$ .

Непосредственно из теоремы 3 следует теорема 4.

\* Доказательство теоремы 1 совпадает с доказательством теоремы 8 заметки (1). Теорема 1 и доказанная ниже теорема 3 по существу являются непосредственными следствиями выбранного нами определения подчинения. Аналогичные теоремы для класса  $\overline{HB}1(P)$  имеются у Б. Я. Левина<sup>(3,4)</sup>. См. также § 12, гл. 6 в (2).

**Теорема 4.** Пусть  $A$  — вещественный ( $A\bar{f} = \overline{Af}$ ) линейный оператор, определенный на  $E$ , и  $AE \subset E$ . Пусть функция  $f(z)$  подчинена функции  $F(z)$  класса  $E$ . Тогда при любом целом  $n$  функция  $A^n f$  определена и подчинена функции  $A^n F$ . Класс  $E$  можно заменить любым отмеченным подклассом.

Институт физических проблем  
им. С. И. Вавилова  
Академии наук СССР

Поступило  
27 X 1951

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. Мейман, ДАН, 71, № 4 (1950). <sup>2</sup> Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 26 (1949). <sup>3</sup> Б. Я. Левин, ДАН, 65, № 5 (1949). <sup>4</sup> Б. Я. Левин, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 1 (1950). <sup>5</sup> Б. Я. Левин, ДАН, 78, №№ 5 и 6 (1951). <sup>6</sup> J. Grommer, Journ. f. reine u. angew. Math., 144 (1914). <sup>7</sup> Н. Г. Чеботарев, Собр. соч., 2, стр. 25, 1949; Math. Ann. 99 (1928). <sup>8</sup> М. Г. Крейн, Об одном специальном классе..., в книге Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна, Некоторые вопросы теории моментов, 1939. <sup>9</sup> Н. Мейман, Зап. Харьковск. матем. об-ва, 14 (1937). <sup>10</sup> E. Wigner, Ann. of Math., 53, No. 1 (1951). <sup>11</sup> Н. Мейман, ДАН, 53, № 1 (1946). <sup>12</sup> Н. Н. Мейман, ДАН, 40, №№ 2 и 5 (1943). <sup>13</sup> M. L. Cartwright, Proc. Lond. Math. Soc., 38 (1934).