Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

ОБ ОБЩЕМ ВИДЕ РАЗРЕШИМЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО И НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 X 1951)

1. Прежде чем приступить к постановке задачи, решаемой в настоящей заметке, введем важное для дальнейшего понятие граничного оператора. Пусть D — некоторая область в n-мерном пространстве, Γ — граница этой области.

Определение. Линейный оператор γ, заданный на некотором линейном многообразии Ω_γ функций $f(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, определенных в области D, называется граничным оператором, если:

1) γ переводит функции $f(x)\in\Omega_\gamma$ в функции $\varphi(s)$, заданные на границе Γ области D $(s\in\Gamma)$;

2) любую функцию $f_0(x)\in\Omega_\gamma$, обращающуюся в нуль в некоторой граничной полоске области D, оператор γ переводит в нуль: $\gamma f_0(x)=0$. В теории краевых задач часто встречаются следующие граничные операторы: $\gamma f(x)=f|_\Gamma$, $\gamma f(x)=\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_\Gamma+a(s)f|_\Gamma$ и т. п.

2. Пусть в конечной области D дано эллиптическое дифференциальное уравнение

$$Lf\equiv-\sum_{i,\,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}+c(x)f(x)=h(x),\quad (1)$$

причем предполагается, что $c(x)\geqslant 0$ для $x\in D$.

Дифференциальный оператор L мы будем рассматривать как оператор в гильбертовом пространстве $L_2(D)$ функций, суммируемых в квадрате по D. Область определения Ω_L этого оператора состоит из всех функций $f(x)$, для которых можно определить значение $Lf(x)$ (в обычном или обобщенном смысле), причем $Lf(x)\in L_2(D)$.

Наряду с дифференциальным уравнением (1) рассмотрим некоторый граничный оператор

$$\gamma f(x)=\varphi(s)\quad (s\in\Gamma),\qquad (2)$$

отображающий функции $f(x)\in\Omega_\gamma\subset L_2(D)$ в функции $\varphi(s)$, принадлежащие некоторому пространству $Б(\Gamma)$ типа (B) (Банаха) функций, заданных на Γ (например, пространству $L_p(\Gamma)$, $p\geqslant 1$, функций, суммируемых со степенью p по Γ, или пространству $C(\Gamma)$, $C^{(n)}(\Gamma)$ и т. п.)

Условие (2) называется краевым условием, а задача о нахождении решения $f(x)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), называется краевой задачей. Очевидно, разным граничным операторам γ соответствуют разные краевые задачи для уравнения (1).

Определение. Краевую задачу (1), (2) будем называть разрешимой, если выполнены следующие условия:

а) для любых правых частей $h(x)$, $\varphi(s)$ ($h(x) \in L_2(D)$, $\varphi(s) \in Б(\Gamma)$) существует, и притом единственное, решение задачи (1), (2);

б) малым изменениям правых частей $h(x)$, $\varphi(s)$ (в метриках $L_2(D)$ и $Б(\Gamma)$) соответствуют малые изменения решений $f(x)$ (в метрике $L_2(D)$), т. е. если через V обозначить оператор, сопоставляющий правым частям $h(x)$, $\varphi(s)$ соответствующее решение $f(x)$ задачи (1), (2): $V(h(x), \varphi(s)) = f(x)$, то оператор V ограничен: $\|V\| < +\infty$.

Если выполнено условие а) и оператор V вполне непрерывен, то будем говорить, что задача (1), (2) вполне разрешима.

Цель настоящей заметки — найти общий вид краевых условий (2) (или, что то же, граничных операторов γ), при которых соответствующие краевые задачи (1), (2) разрешимы (или вполне разрешимы). Кроме того, для некоторого класса краевых задач устанавливается связь между разрешимостью однородного уравнения $Lu = 0$ при неоднородных краевых условиях и разрешимостью неоднородного уравнения $Lf = h$ при соответствующих однородных краевых условиях.

3. Пусть (1), (2) — некоторая разрешимая (или вполне разрешимая) краевая задача. Найдем представление граничного оператора γ посредством двух основных граничных операторов γ_1 и γ_2 (определение см. ниже), введенных нами в [1-3]. С этой целью запишем решение $f(x)$ задачи (1), (2) в виде суммы двух слагаемых:

$$f(x) = \bar{f}(x) + u(x), \tag{3}$$

где $\bar{f}(x)$ — решение краевой задачи

$$L\bar{f}(x) = h(x), \quad \gamma\bar{f}(x) = 0, \tag{4}$$

а $u(x)$ — решение задачи

$$Lu(x) = 0, \quad \gamma u(x) = \varphi(s). \tag{5}$$

Так как, по предположению, краевая задача (1), (2) разрешима, то, в частности, разрешима и задача (4) для любых $h(x) \in L_2(D)$, причем если через $\bar{L}$ обозначить оператор L, рассматриваемый только на многообразии $\Omega_{\bar{L}}$ функций $\bar{f}(x)$, удовлетворяющих условию $\gamma\bar{f}(x) = 0$, то существует обратный оператор $\bar{L}^{-1}$, который ограничен (или вполне непрерывен). Следовательно, согласно [2], оператор $\bar{L}$ является разрешимым (или вполне разрешимым), и ему соответствует некоторое краевое условие в каноническом виде:

$$\bar{\gamma}\bar{f} = \gamma_1\bar{f} - \bar{C}\gamma_2\bar{f} = 0, \tag{6}$$

которому удовлетворяют функции $\bar{f}(x)$ из $\Omega_{\bar{L}}$, и только они ($\gamma_1 f = f|_\Gamma$, $\gamma_2 f = \frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_\Gamma - Pf\Big|_\Gamma$, где $\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\cos(nx_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_\Gamma$, а $Pf\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma$ и $u(x)$ — решение первой краевой задачи: $Lu = 0$, $u|_\Gamma = f|_\Gamma$ [2,3]); линейный оператор $\bar{C}$ выражается через оператор $\bar{L}$ и отображает пространство $\mathcal{H}_2$ всех функций $\gamma_2 f$ в пространство $\mathcal{H}_1$ всех элементов $\gamma_1 f$, причем оператор $\bar{C}$ — ограниченный (или вполне непрерывный); в пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ вводится естественным образом метрика (см. [2,3]).

Таким образом, на многообразии $\Omega_{\bar{L}}$ граничный оператор γ, входящий в условие (2), и граничный оператор $\bar{\gamma}$ отличаются лишь тем, что оператор γ переводит все функции $\bar{f}(x) \in \Omega_{\bar{L}}$ в нуль пространства $Б(\Gamma)$

(согласно (4)), а оператор $\overline{\gamma}$ — в нуль пространства $\mathscr{H}_1$ (согласно (6)). Далее, заметим, что для решений $u(x)$ однородного уравнения $Lu = 0$ мы имеем: $\overline{\gamma}u = \gamma_1 u$ (так как $\gamma_2 u = 0$), и так как метрика пространства $\mathscr{H}_1$ (элементов $\gamma_1 u$) эквивалентна метрике подпространства $U \subset L_2(D)$ всех решений $u(x)$ уравнения $Lu = 0$, то оператор $\overline{\gamma}$, рассматриваемый только на U, имеет ограниченный обратный: $\|\overline{\gamma}^{-1}\| < +\infty$ *. Оператор γ линейно отображает часть подпространства U на пространство $Б(\Gamma)$: $\gamma u(x) = \varphi(s)$, где $u(x) \in U$, $\varphi(s) \in Б(\Gamma)$ (см. (5)).

Обозначим через Q оператор, который переводит функции $\overline{\gamma}u\,(=\gamma_1 u = u|_\Gamma) \in \mathscr{H}_1$ в соответствующие функции $\varphi(s) = \gamma u \in Б(\Gamma)$:

$$\gamma u \equiv Q\overline{\gamma}u = \varphi(s). \tag{7}$$

Очевидно, $Q = \gamma\overline{\gamma}^{-1}$. Так как, по условию, малым изменениям $\varphi(s)$ отвечают малые изменения соответствующих решений $u(x)$ задачи (5) и метрика подпространства U эквивалентна метрике пространства $\mathscr{H}_1 = \gamma_1 U$, то оператор Q имеет ограниченный (или вполне непрерывный) обратный: $\|Q^{-1}\| < +\infty$.

Легко видеть, что граничный оператор γ совпадает с оператором $Q\overline{\gamma}$ не только на подпространстве U, но и для всех функций $f(x)$, являющихся решениями задачи (1), (2) при любых правых частях $h(x) \in L_2(D)$ и $\varphi(s) \in Б(\Gamma)$. Действительно, согласно равенству (3), свойству линейности граничных операторов и формулам (7), (6) имеем:

$$\begin{aligned}\gamma f = \gamma(\overline{f} + u) = \gamma u = Q\overline{\gamma}u = \\ = Q\overline{\gamma}(u + \overline{f}) = Q\overline{\gamma}f = Q(\gamma_1 f - \overline{C}\gamma_2 f).\end{aligned} \tag{8}$$

Тем самым доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы краевая задача* (1), (2) *была разрешима (или вполне разрешима), необходимо и достаточно, чтобы граничный оператор* γ, *задающий краевое условие* (2), *мог быть представлен в следующем виде*:

$$\gamma f \equiv Q(\gamma_1 f - \overline{C}\gamma_2 f) = \varphi(s), \tag{9}$$

где $\gamma_1 f$ *и* $\gamma_2 f$ *имеют смысл, указанный выше,* $\overline{C}$ — *ограниченный (или вполне непрерывный) оператор, отображающий пространство* $\mathscr{H}_2$ *(функций* $\gamma_2 f$*) в пространство* $\mathscr{H}_1$ *(функций* $\gamma_1 f$*), а оператор* Q *имеет ограниченный (или вполне непрерывный) обратный оператор* Q^{-1}, *который отображает пространство* $Б(\Gamma)$ *(функций* $\varphi(s)$*) в пространство* $\mathscr{H}_1$.

Очевидно, оператор $\overline{C}$ характеризует задачу (4), а оператор Q — задачу (5).

4. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть дана краевая задача*

$$Lu = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma + Au\bigg|_\Gamma = \varphi(s), \tag{10}$$

где A — *линейный оператор с областью определения, всюду плотной в* $L_p(\Gamma)$ $\left(p — \textit{некоторое число} \geqslant \frac{2n}{n-1}\right)$, *и областью изменения, ле-*

---

* Отметим, что для достаточно гладких функций $u(s) = \overline{\gamma}u$ имеем: $u(x) = \overline{\gamma}^{-1}u(s) = \int\limits_\Gamma \frac{\partial G(x, s)}{\partial \nu}u(s)\,ds$, где G — функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1).

жащей в пространстве $L_q(\Gamma)$ $\left(q\text{ — }\textit{некоторое число},\ 1 \leqslant q < \frac{2(n-1)}{n-2}\right)$. *Предположим, что*:

1) *краевая задача* (10) *разрешима, и притом единственным образом, для любой функции* $\varphi(s) \in L_q(\Gamma)$, *где* q — *то же, что выше*;

2) *оператор* V_0, *переводящий любую функцию* $\varphi(s) \in L_q(\Gamma)$ *в соответствующее решение* $u(x) \in L_2(D): V_0\varphi(s) = u(x)$, *является ограниченным* (*или вполне непрерывным*) *оператором*: $\| V_0 \| < +\infty$.

Тогда краевая задача для неоднородного уравнения при соответствующих однородных краевых условиях:

$$Lf = h, \quad \frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_\Gamma + Af\Big|_\Gamma = 0, \tag{11}$$

1′) *разрешима, и притом единственным образом, для любой правой части* $h(x) \in L_2(D)$ *и*

2′) *оператор* L^{-1}, *сопоставляющий правой части* $h(x)$ *соответствующее решение* $f(x)$ *задачи* (11): $L^{-1}h = f$, *ограничен* (*или вполне непрерывен*): $\| L^{-1} \| < +\infty$.

Приведем в основных чертах доказательство этой теоремы. Для любого решения $u(x)$ однородного уравнения $Lu = 0$ имеем $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = Pu|_\Gamma$, и, следовательно, краевое условие (10) можно записать в таком виде:

$$Pu|_\Gamma + Au|_\Gamma = \varphi(s) \quad \text{или} \quad (P + A)\,u|_\Gamma = \varphi(s). \tag{12}$$

Согласно условию 2), оператор $P + A$ имеет ограниченный (или вполне непрерывный) обратный оператор $(P + A)^{-1}$, который переводит пространство $L_q(\Gamma)$ в $\mathscr{H}_1$: $(P + A)^{-1}\varphi(s) = u|_\Gamma = \gamma_1 u$ (напомним, что метрика в пространстве $\mathscr{H}_1$ эквивалентна метрике подпространства U (см. [2, 3])). Отметим, что оператор Q для задачи (10) совпадает с оператором $P + A$.

Преобразуем теперь к каноническому виду [2, 3] краевое условие задачи (11):

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_\Gamma + Af\Big|_\Gamma = \frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_\Gamma - Pf\Big|_\Gamma + (A + P)f\Big|_\Gamma =$$

$$= (A + P)\left(f\Big|_\Gamma + (A + P)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_\Gamma - Pf\Big|_\Gamma\right)\right), \tag{13}$$

которое, очевидно, эквивалентно следующему условию:

$$\gamma_1 f - \overline{C}\gamma_2 f = 0, \tag{14}$$

где $\gamma_1 f = f\Big|_\Gamma$, $\gamma_2 f = \frac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_\Gamma - Pf\Big|_\Gamma$, $\overline{C} = -(A + P)^{-1}$.

Согласно отмеченным выше свойствам оператора $(A + P)^{-1}$, оператор $\overline{C}$, рассматриваемый как оператор, отображающий пространство $\mathscr{H}_2$ (функций $\gamma_2 f$) в пространство $\mathscr{H}_1$ (функций $\gamma_1 f$), ограничен (или вполне непрерывен), так как пространство $\mathscr{H}_2$ вложимо в пространство $L_q(\Gamma)$, а пространство $L_p(\Gamma)$ вложимо в $\mathscr{H}_1$ [2, 3]. Отсюда следует, согласно [2, 3], что краевая задача (11) обладает свойствами 1′) и 2′).

Грубо говоря, из теоремы 2 вытекает, что из разрешимости краевой задачи для однородного уравнения при неоднородных краевых условиях, т. е. задачи (10), следует разрешимость соответствующей краевой задачи для неоднородного уравнения при однородных краевых условиях, т. е. задачи (11).

Поступило
12 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, ДАН, 65, № 6 (1949). [2] М. И. Вишик, ДАН, 77, № 3 (1951).
[3] М. И. Вишик, Тр. Московск. матем. об-ва, 1 (1952).