Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. М. ГОЛУЗИН

О ЗАДАЧЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 15 X 1951)

Центральное место в теории конформного отображения отводится так называемой задаче коэффициентов однолистных функций, которая требует ответа на следующий вопрос:

Каковы необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad c_1=1, \tag{1}$$

для того, чтобы его сумма была функцией, регулярной и однолистной в круге $|z|<1$.

Удовлетворительного решения этой задаче до сих пор не дано. Однако его можно дать в различных и довольно простых формах, допускающих большой произвол в формулировках.

Для этого, наряду с разложением (1), рассмотрим (формальное) разложение

$$\frac{z-z'}{f(z)-f(z')}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{m=2}^{\infty} c_m \sum_{l=0}^{m-1} z^l z'^{m-l-1}\right)^n=\sum_{k,l=1}^{\infty} c_{k,l} z^{k-1} z'^{l-1}; \tag{2}$$

здесь $c_{1,1}=1$, а $c_{k,l}$ $(k, l=1,2,\ldots)$ — целые рациональные функции, соответственно, коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$, $n=\max(k,l)$; под $c_{k,l}$ в дальнейшем понимаются именно эти функции, для которых (2) является производящим рядом.

Теорема 1. *Для того чтобы функция* (2), *определяемая степенным рядом* (1), *была регулярна и однолистна в* $|z|<1$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты* c_n, $n=2,3,\ldots$, *удовлетворяли системе неравенств*

$$|c_n|<en, \quad n=2,3,\ldots \quad (e=2{,}71\ldots) \tag{3}$$

и системе неравенств

$$|c_{k,l}|<4e\sqrt{kl}, \quad kl=1,2,\ldots \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $f(z)$ регулярна и однолистна в $|z|<1$. Тогда справедливость неравенств (3) хорошо известна. Для доказательства неравенств (4) исходим из интегрального представления коэффициентов $c_{k,l}$:

$$c_{k,l} = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{|z|=r}\int\limits_{|z'|=r'} \frac{z-z'}{f(z)-f(z')}\frac{dz}{z^k}\frac{dz'}{z'^l},$$

$$r<1, \quad r'<1, \quad k, l = 1, 2, \ldots,$$

и оценки автора (1)

$$\left|\frac{f(z)-f(z')}{z'-z}\right| \geqslant \left|\frac{f(z)\,f(z')}{zz'}\right| \sqrt{(1-r^2)(1-r'^2)}, \quad r<1, \quad r'<1. \tag{5}$$

Имеем ($\theta = \arg z$, $\theta' = \arg z'$):

$$|c_{k,l}| \leqslant \sqrt{\frac{1}{r^{2k-2}(1-r^2)}\frac{1}{r'^{2l-2}(1-r'^2)}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}\left|\frac{z}{f(z)}\right|d\theta\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z'|=r'}\left|\frac{z'}{f(z')}\right|d\theta'. \tag{6}$$

Но, положив $F(z) = f(z^2)^{-1/2} = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k z^k$ и используя теорему площадей, имеем при $r<1$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r}\left|\frac{z}{f(z)}\right|d\theta = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2 r^{2k+2} < 2.$$

Поэтому из (6) следует

$$|c_{k,l}| \leqslant 4\sqrt{\frac{1}{r^{2k-2}(1-r^2)}\frac{1}{r'^{2l-2}(1-r'^2)}}.$$

Если взять здесь $r^2 = 1 - \frac{1}{k}$, $r'^2 = 1 - \frac{1}{l}$, то получим (4). Итак, необходимость условий (3) и (4) доказана.

Обратно, если условия (3) и (4) выполнены, то условия (3) гарантируют сходимость ряда (1) в $|z|<1$, а условие (4) — сходимость ряда (2) в $|z|<1$ и $|z'|<1$. Из первого следует регулярность $f(z)$ в $|z|<1$, а из второго, что

$$\frac{f(z)-f(z')}{z-z'} \neq 0 \text{ при } |z|<1, \ |z'|<1,$$

т. е. однолистность $f(z)$ в $|z|<1$. Этим доказана достаточность условий теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(z)$, определяемая степенным рядом* (1), *была регулярна и однолистна в круге $|z|<1$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты c_k удовлетворяли единственному неравенству*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{|c_k|+|c_{k,l}|}{k^3 l^3} < 14e. \tag{7}$$

Доказательство. Если функция $f(z)$ регулярна и однолистна в $|z|<1$, то по (3) и (4) имеем

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{|c_k|+|c_{k,l}|}{k^3 l^3} \leqslant \sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{ekl+4ekl}{k^3 l^3} = 5e\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 l^2} = 5e\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^2 = 5e\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 < 14e,$$

т. е. (7). Обратно, если (7) имеет место, то имеют место также неравенства

$$|c_k| \leqslant 14ek^3, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

и неравенства

$$|c_{k,l}| < 14\,ek^3 l^3, \quad k, l = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Как выше, неравенства (8) гарантируют регулярность функции $f(z)$ в $|z| < 1$, а неравенства (9) — однолистность $f(z)$ в $|z| < 1$. Теорема доказана.

Примечания. 1. Условия (3) и (4) можно заменить различными другими, также являющимися необходимыми и достаточными условиями регулярности и однолистности $f(z)$ в $|z| < 1$, как, например, условиями

$$|c_n| < 10\,n^{10}, \quad n = 2, 3, \ldots;$$

$$|c_{k,l}| < 1000\,k^{100} l^{100}, \quad k, l = 1, 2, \ldots$$

То же имеет место и по отношению к условию (7).

2. Теорема 1 с заменой неравенства (4) на неравенства

$$|c_{k,l}| < 32\,e^2 kl, \quad k, l = 1, 2, \ldots,$$

может быть доказана, исходя (вместо оценки (5)) из оценки

$$|f(z)| \geqslant \frac{|z|}{(1+|z|)^2} > \frac{|z|}{4},$$

применив последнюю к функции

$$g(\zeta) = \frac{f\left(\dfrac{\zeta + z}{1 + \bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{f'(z)(1 - |z|^2)}, \quad |z| < 1,$$

в точке $\zeta = \dfrac{z' - z}{1 - \bar{z}z'}$.

3. Если вместо (2) ввести разложение

$$\log \frac{(f(z) - f(z'))\,zz'}{(z - z')\,f(z)\,f(z')} = \sum_{k,\,l=1}^{\infty} \tilde{c}_{k,l}\, z^{k-1} z'^{\,l-1},$$

где $\tilde{c}_{k,l}$ $(k, l = 1, 2, \ldots)$ — целые рациональные функции от $c_2, \ldots, c_n$, $n = \max(k, l)$, то, опираясь на одну оценку автора [2], можно доказать теорему:

Теорема 3. *Для того чтобы функция $f(z)$, определяемая степенным рядом* (1), *была мероморфна и однолистна в $|z| < 1$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $\tilde{c}_{k,l}$ удовлетворяли системе неравенств*

$$|\tilde{c}_{k,l}| < \frac{1}{\sqrt{k,l}}, \quad k, l = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Поступило
12 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 19 (61), 183 (1946). [2] Г. М. Голузин, там же, 29 (71) : 1, 197 (1951).