Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОТНОСИТЕЛЬНО ИЗМЕНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ)

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 13 X 1951)

1. Рассмотрим в конечной области D n-мерного пространства краевую задачу

$$Lu \equiv -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = h(x) \quad (x \in D), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(s)}{\partial \nu} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i(s)u(s) + Au(s) = \varphi(s) \quad (s \in \Gamma), \tag{2}$$

где L — эллиптический дифференциальный оператор; $x = (x_1, \ldots, x_n)$; Γ — граница области D; A — линейный оператор, действующий в пространстве функций, суммируемых в квадрате по Γ ($L_2(\Gamma)$), и $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\cos(n, x_k)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Предположим, что $c(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i(x)}{\partial x_i} \geqslant 0$ для $x \in D$, причем по крайней мере в одной точке $x \in D$ имеет место строгое неравенство; кроме того, допустим, что квадратичная форма оператора A — неотрицательная, т. е. интеграл по Γ от $Au(s)\cdot u(s)$ не меньше нуля (для любой функции $u(s)$ из области определения Ω_A оператора A).

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим аналогичную краевую задачу

$$L'v \equiv -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a'_{ik}(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n} b'_i(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} + c'(x)v(x) = h'(x), \tag{1'}$$

$$\frac{\partial v(s)}{\partial \nu'} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b'_i v(s) + A'v(s) = \varphi'(s), \tag{2'}$$

для которой выполнены условия, аналогичные сформулированным выше для задачи (1), (2).

Предположим, что соответствующие коэффициенты и правые части входящие в краевые задачи (1), (2) и (1′), (2′), мало отличаются друг от друга:

$$|a_{ik}(x) - a'_{ik}(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \left|c(x) - c'(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i(x) - b'_i(x))\right| \leqslant \varepsilon,$$

$$|b_i(x) - b'_i(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \int_\Gamma \ldots \int ((A - A')v(s))\cdot f(s)\,ds \leqslant \tag{3}$$

$$\leqslant \varepsilon \left(\int_\Gamma \ldots \int (Av(s))\cdot v(s)\,ds\right)^{1/2} \left(\int_\Gamma \ldots \int (Af(s))\cdot f(s)\,ds\right)^{1/2},$$

где $i, k = 1, 2, \ldots, n$ и x — любая точка области D. В случае ограниченных операторов A и A' достаточно потребовать, чтобы они мало отличались по норме, т. е. чтобы в подинтегральных выражениях последнего неравенства стояли функции $(v(s))^2$ и $(f(s))^2$.

Доказана следующая теорема:

Теорема. *Если краевые задачи* (1), (2) *и* (1'), (2') *удовлетворяют сформулированным выше условиям, то*:

1) *эти задачи разрешимы, и притом единственным образом, для любых правых частей* $h(x)$, $h'(x) \in L_p(D)$, *где* $p = 2n/(n+2)$ *для* $n > 2$ *и* p — *любое число, большее* 1, *для* $n = 2$, *а* $\varphi(s)$, $\varphi'(s) \in L_{q^*}(\Gamma)$, *где* q^* — *любое число, большее* $2(n-1)/n$;

2) *соответствующие решения этих задач* $u(x)$ *и* $v(x)$ *мало отличаются друг от друга; точнее, имеет место следующая оценка*:

$$\left(\int_D \cdots \int \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right)^2 + (u(x) - v(x))^2\right] dx\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C\left[\left(\int_D \cdots \int (h(x) - h'(x))^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Gamma \cdots \int (\varphi(s) - \varphi'(s))^{q^*}\, ds\right)^{1/q^*}\right] +$$
$$+ C_1\varepsilon\left[\left(\int_D \cdots \int (h(x))^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Gamma \cdots \int (\varphi(s))^{q^*}\, ds\right)^{1/q^*}\right]^{*}. \qquad (4)$$

2. Приведем в основных чертах доказательство этой теоремы, причем для простоты и для сокращения изложения ограничимся лишь тем случаем, когда $b_i(x) \equiv 0$, $b'_i(x) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и операторы A и A' — самосопряженные. Кроме того, мы докажем справедливость оценки (4) лишь для $p = 2$ и $q^* = 2$.

Докажем сначала, что краевая задача (1), (2) разрешима, и притом единственным образом, для любых правых частей $h(x) \in L_2(D)$ и $\varphi(s) \in L_2(\Gamma)$, причем соответствующее решение $u(x)$ непрерывно зависит от этих правых частей. Действительно, для решения $u(x)$ задачи (1), (2) должно иметь место соотношение:

$$\int_D \cdots \int \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u'_{x_i} f'_{x_k} + cuf\right) dx + \int_\Gamma \cdots \int Au(s) \cdot f(s)\, ds =$$
$$= \int_\Gamma \cdots \int \varphi(s) \cdot f(s)\, ds + \int_D \cdots \int h(x) \cdot f(x)\, dx \qquad (5)$$

для любой гладкой функции $f(x)$.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathscr{H}_1$, элементами которого являются системы функций $(\psi'_{x_1}, \psi'_{x_2}, \ldots, \psi'_{x_n}, \psi) = \overline{\psi}$ (первые n компонент — частные производные функции $\psi(x)$, заданной в области D) и в котором для „гладких" элементов $\overline{\psi}$ и $\overline{\psi}_1$ скалярное произведение задается по формуле:

$$\{\overline{\psi}, \overline{\psi}_1\} = \int_D \cdots \int \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \psi'_{x_i} \psi'_{1x_k} + c\psi\psi_1\right) dx + \int_\Gamma \cdots \int A\psi(s) \cdot \psi_1(s)\, ds; \qquad (6)$$

для „негладких" элементов $\overline{\psi}$ скалярное произведение определяется с помощью предельного перехода. Введем еще в рассмотрение гиль-

---

* Следует отметить, что неравенство (4) выполняется и в том случае, если к его левой части добавить слагаемое $\left(\int_\Gamma \cdots \int (A(u(s) - v(s))) \cdot (u(s) - v(s))\, ds\right)^{1/2}$.

бертово пространство $\mathscr{H}_2$, совпадающее с ортогональной суммой пространств $L_2(D)$ и $L_2(\Gamma)$. Элементами этого пространства являются, очевидно, пары функций $(h(x),\ \varphi(s))$, а скалярное произведение задается по формуле:

$$[(h(x),\ \varphi(s)),\ (h_1(x),\ \varphi_1(s))] = \int\limits_D \ldots \int h \cdot h_1 dx + \int\limits_\Gamma \ldots \int \varphi \cdot \varphi_1 ds. \qquad (7)$$

Пользуясь скалярными произведениями (6) и (7), мы можем формулу (5) переписать в таком виде

$$\{\overline{u},\ \overline{f}\} = [(h(x),\ \varphi(s)),\ (f(x),\ f(s))], \qquad (8)$$

где $\overline{u} = (u'_{x_1}, \ldots, u'_{x_n}, u)$, а $\overline{f} = (f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}, f)$.

Введем в рассмотрение оператор вложения W, сопоставляющий элементу $\overline{f} \in \mathscr{H}_1$ соответствующий элемент $(f(x),\ f(s)) \in \mathscr{H}_2$: $W\overline{f} = (f(x),\ f(s))$. Пользуясь оператором W, мы можем придать формуле (8) еще следующий вид:

$$\{\overline{u},\ \overline{f}\} = [(h(x),\ \varphi(s)),\ W\overline{f}]. \qquad (9)$$

Согласно теореме С. Л. Соболева ([1], стр, 64—65), оператор W ограничен. Следовательно, сопряженный с ним оператор W^* существует, ограничен и определен на всем пространстве $\mathscr{H}_2$. Согласно формуле (9), $W^*(h(x),\ \varphi(s)) = \overline{u} = (u'_{x_1}, \ldots, u'_{x_n}, u)$. Тем самым доказано, что для любых правых частей $h(x)$, $\varphi(s)$ существует, и притом единственное, (обобщенное) решение $u(x)$ задачи (1), (2) $((u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u) = W^*(h(x),\ \varphi(s)))$, причем для него выполнено соотношение (5) при любой функции $f(x)$. В силу ограниченности оператора W^* это решение непрерывно зависит от правых частей $h(x)$ и $\varphi(s)$; точнее, имеет место неравенство

$$\int\limits_D \ldots \int \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u^2\right) dx \leqslant C_1 \{\overline{u},\ \overline{u}\} \leqslant C_2 \left(\int\limits_D \ldots \int h^2 dx + \int\limits_\Gamma \ldots \int \varphi^2 ds\right) \quad (10)$$

(в первом неравенстве мы воспользовались условием эллиптичности).

3. Теперь докажем, что при малом изменении коэффициентов, входящих в краевую задачу (1), (2), мало изменяется соответствующее решение $u(x)$.

Предположим сначала, что в правых частях формул (1) и (2) стоят те же функции, что и в правых частях (1′) и (2′), т. е. $h'(x)$ и $\varphi'(s)$. Запишем формулу, аналогичную формуле (5), в применении к решению $v(x)$ задачи (1′), (2′) и к функции $f(x)$, и затем вычтем обе части этой формулы из соответствующих частей формулы (5), в которой вместо функций u, h, φ стоят функции u_1, h', φ', где u_1 — решение задачи (1), (2) с правыми частями h' и φ':

$$\int\limits_D \ldots \int \Big[\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(u'_{1x_i} - v'_{x_i}) f'_{x_k} + c(u_1 - v) f\Big] dx +$$

$$+ \int\limits_D \ldots \int \Big[\sum_{i,\,k=1}^{n} (a_{ik} - a'_{ik}) v'_{x_i} f'_{x_k} + (c - c')\, vf\Big] dx +$$

$$+ \int\limits_\Gamma \ldots \int A(u_1 - v) \cdot f\, ds + \int\limits_\Gamma \ldots \int (A - A')\, v \cdot f\, ds = 0. \qquad (11)$$

Пользуясь обозначением (6) и неравенствами (3), получим:

$$|\{\overline{u}_1-\overline{v}, f\}|\leqslant C_3\varepsilon\{\overline{v}, \overline{v}\}^{1/2}\cdot\{\overline{f}, \overline{f}\}^{1/2}. \tag{12}$$

Отсюда следует, что

$$\{\overline{u}_1-\overline{v}, \overline{u}_1-\overline{v}\}^{1/2}\leqslant C_3\varepsilon\{\overline{v}, \overline{v}\}^{1/2}. \tag{13}$$

Учитывая условие эллиптичности и применяя неравенство, аналогичное (10), для функции $v(x)$, получим из (13), что

$$\int\limits_D\ldots\int\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2+(u_1-v)^2\right)dx\leqslant C_1\{\overline{u}_1-\overline{v}, \overline{u}_1-\overline{v}\}\leqslant$$
$$\leqslant C_4\varepsilon^2\left(\int\limits_D\ldots\int(h')^2\,dx+\int\limits_\Gamma\ldots\int(\varphi')^2\,ds\right). \tag{14}$$

Чтобы установить оценку (4) для решений u и v задач (1), (2) и (1′), (2′) в излагаемом нами случае, достаточно применить к разности $u-u_1$ оценку (10) (в которой справа будут стоять, очевидно, интегралы от разностей $h-h'$ и $\varphi-\varphi'$) и затем к разности u_1-v применить оценку (14). После очевидных замечаний отсюда получается оценка (4).

Доказательство теоремы в общем случае осложняется необходимостью учитывать как кососимметрическую часть оператора Lu (т. е., грубо говоря, члены первого порядка), так и кососимметрическую часть оператора A, входящего в краевое условие.

4. Теорема обобщается на случай соответствующих краевых задач для эллиптических уравнений порядка $2m$ и систем эллиптических уравнений порядка $2m$, на коэффициенты которых наложены известные ограничения, обеспечивающие разрешимость этих задач.

Поступило
11 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.