

# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

Василевич Ю. В.<sup>1</sup>, Остриков В. О.<sup>2</sup>, Остриков О. М.<sup>3</sup>

## СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ ДЛЯ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА МАРТЕНСИТНОЙ ПРОСЛОЙКИ В СЛУЧАЕ ОДНООСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ/СЖАТИЯ ФЕРРОМАГНИТНОГО КРИСТАЛЛА С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

1. *Белорусский национальный технический университет,  
Минск, Беларусь*
2. *УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого»,  
Гомель, Беларусь*
3. *УО «Белорусский государственный университет транспорта»,  
Гомель, Беларусь*

*Рассмотрено применение классических методов теоретической механики для решения статической задачи для границ раздела аустенит/мартенсит мартенситной прослойки в случае одноосного растяжения/сжатия ферромагнитного кристалла с эффектом памяти формы. В ходе решения статических задач для случая действия сил растяжения/сжатия на торцах призматического образца разработана методика расчета величин, возникающих на границах раздела сил нормальной реакции, а также сдвиговых сил.*

**Введение.** Исследования ферромагнитных материалов с эффектом памяти формы обращают на себя внимание перспективами практического применения в технических системах, несущих новые инновационные решения [1–8]. Перспективными направлениями в исследованиях материалов с памятью формы является выполнение технических расчетов для различных состояний этих материалов, обладающих уникальными физико-механическими свойствами [8–12].

**Целью работы** стало решение статических задач для границ раздела аустенит/мартенсит единичной мартенситной прослойки в случае одноосного растяжения и сжатия ферромагнитного кристалла с эффектом памяти формы.

**Постановка задачи в случае одноосного растяжения.**

На рис. 1 представлена расчетная схема для призматического ферромагнитного кристалла состава Гейслера, находящегося под действием сил растяжения  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , приложенных к торцам призматического образца вдоль оси  $X$

в противоположных относительно друг друга направлениях. В кристалле имеется мартенситная прослойка с длиной  $l_m$  и две аустенитные части с длинами  $l_{a1}$  и  $l_{a2}$  (рис. 1). Мартенситная прослойка повернута на угол  $\delta$  к поверхности кристалла, а границы раздела аустенит/мартенсит – на угол  $\psi$ . Величины длин аустенитных и мартенситной частей ( $l_{a1}$ ,  $l_{a2}$ ,  $l_m$ ), а так же растягивающие силы, действующие на торцах призматического ( $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ ), примем за известные.

На рис. 1, а и 1, d представлено действие в направлении осей  $XU$ ,  $X'U'$  нормальной реакции  $\vec{N}_{A(1)}$  на первую границу раздела аустенит/мартенсит, а также действие вдоль первой границы раздела аустенит/мартенсит силы  $\vec{F}_{\tau(1)}$ . На рис. 1, с и 1, b представлено действие в направлении осей  $XU$ ,  $X'U'$  нормальной реакции  $\vec{N}_{A(2)}$  на вторую границу раздела аустенит/мартенсит, а также действие вдоль второй границы раздела аустенит/мартенсит силы  $\vec{F}_{\tau(2)}$ .

Решение статической задачи для одноосного растяжения.

1. Для мартенситной прослойки для обеспечения статического равновесия должны выполняться условия (рис. 1):

$$\sum F_{iX'} = N_{AX'(1)} - F_{X'(1)} - N_{AX'(2)} + F_{X'(2)} = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{iY'} = F_{Y'(1)} + N_{AY'(1)} - N_{AY'(2)} - F_{Y'(2)} = 0. \quad (2)$$

Система уравнений (1) и (2) может быть дополнена условиями равновесия для моментов сил

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = -(F_{Y'(2)} + N_{AY'(2)}) \cdot l_m + M_B = 0, \quad (3)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = (F_{Y'(1)} + N_{AY'(1)}) \cdot l_m - M_C = 0. \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4) выполнены замены:

$$N_{AX'(2)} = N_{A(2)} \cdot \cos \tau, \quad N_{AY'(2)} = N_{A(2)} \cdot \sin \tau, \quad (5)$$

$$F_{X'(2)} = F_{\tau(2)} \cdot \cos \beta, \quad F_{Y'(2)} = F_{\tau(2)} \cdot \sin \beta, \quad (6)$$

$$N_{AX'(1)} = N_{A(1)} \cdot \cos \tau, \quad N_{AY'(1)} = N_{A(1)} \cdot \sin \tau, \quad (7)$$

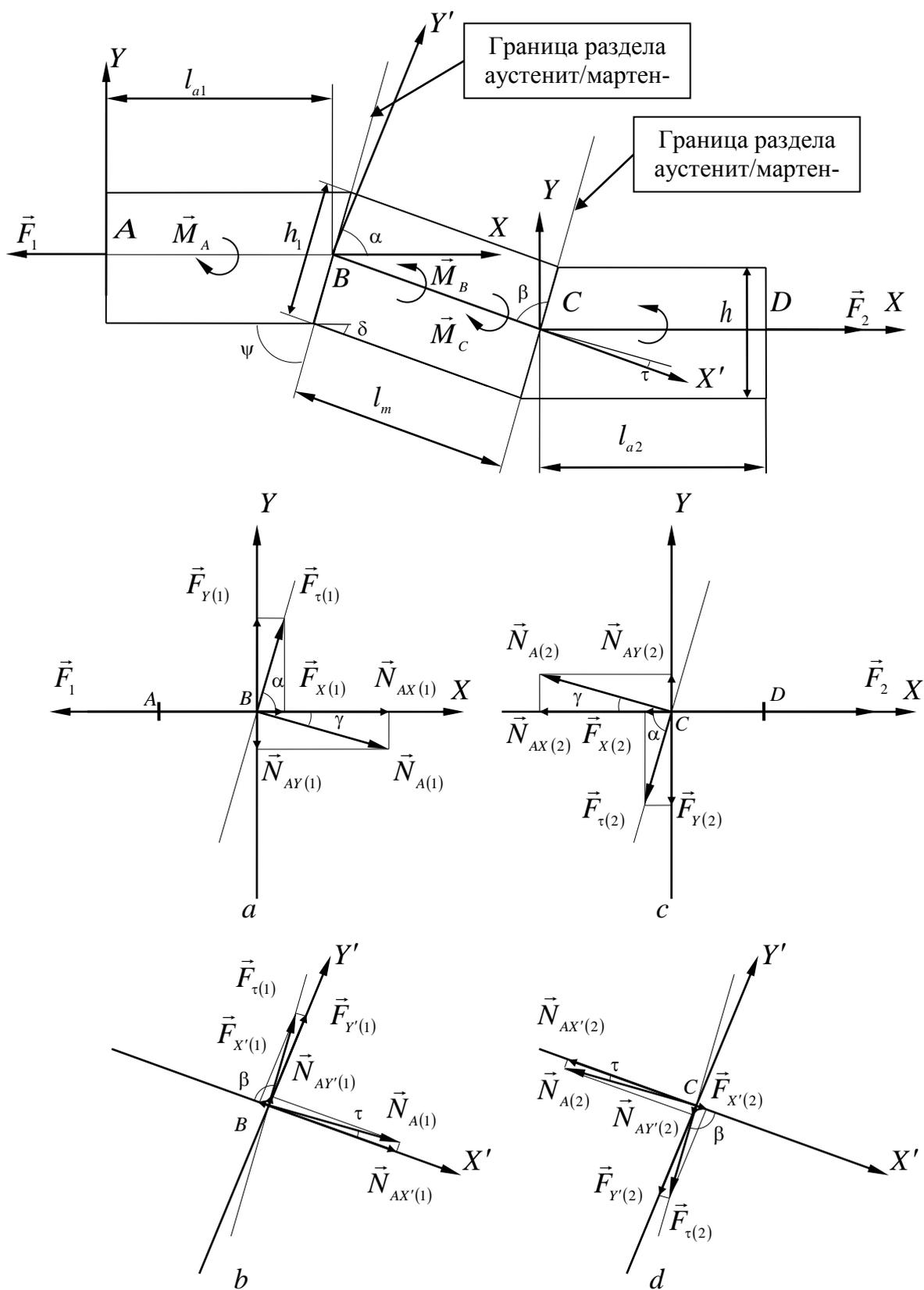


Рис. 1. Схематическое изображение, подвергнутого одноосному растяжению призматического ферромагнитного кристалла с эффектом памяти формы

$$F_{X'(1)} = F_{\tau(1)} \cdot \cos \beta, \quad F_{Y'(1)} = F_{\tau(1)} \cdot \sin \beta. \quad (8)$$

Из (1), (2) получим

$$F_{X'(1)} = N_{AX'(1)} - N_{AX'(2)} + F_{X'(2)}, \quad (9)$$

$$F_{Y'(2)} = F_{Y'(1)} + N_{AY'(1)} - N_{AY'(2)}. \quad (10)$$

Из (3) будем иметь

$$M_B = \left( F_{Y'(2)} + N_{AY'(2)} \right) \cdot l_m = 0, \quad (11)$$

а из (4)

$$M_C = \left( F_{Y'(1)} + N_{AY'(1)} \right) \cdot l_m = 0. \quad (12)$$

2. Для аустенитной части призматического кристалла, на торец которой действует одна из растягивающих сил, сила  $\vec{F}_2$  (рис. 1), будем иметь

$$\sum F_{iX} = F_2 - F_{X(2)} - N_{AX(2)} = 0, \quad (13)$$

$$\sum F_{iY} = N_{AY(2)} - F_{Y(2)} = 0; \quad (14)$$

$$\sum M_D(F_i) = \left( F_{Y(2)} - N_{AY(2)} \right) \cdot l_{a2} + M_D - M_C + M_B = 0. \quad (15)$$

В уравнениях (13)–(15) выполнены замены:

$$N_{AX(2)} = N_{A(2)} \cdot \cos \gamma, \quad N_{AY(2)} = N_{A(2)} \cdot \sin \gamma, \quad (16)$$

$$F_{X(2)} = F_{\tau(2)} \cdot \cos \alpha, \quad F_{Y(2)} = F_{\tau(2)} \cdot \sin \alpha. \quad (17)$$

Из (13), (14) получим

$$N_{AX(2)} = F_2 - F_{X(2)}, \quad (18)$$

$$N_{AY(2)} = F_{Y(2)}. \quad (19)$$

Из (15) с учетом (11), (12), получим

$$M_D = -(F_{Y(2)} - N_{AY(2)}) \cdot l_{a2} + (F_{Y'(1)} + N_{AY'(1)}) \cdot l_m - (F_{Y'(2)} + N_{AY'(2)}) \cdot l_m = 0. \quad (20)$$

3. Для аустенитной части ферромагнитного кристалла, на который действует растягивающая сила  $\vec{F}_1$  (рис. 1), будем иметь:

$$\sum F_{iX} = N_{AX(1)} + F_{X(1)} - F_1 = 0, \quad (21)$$

$$\sum F_{iY} = F_{Y(1)} - N_{AY(1)} = 0, \quad (22)$$

$$\sum M_A(F_i) = (N_{AY'(1)} - F_{Y'(1)}) \cdot l_{a1} - M_A - M_B + M_C = 0. \quad (23)$$

В уравнениях (21)–(23) принято:

$$N_{AX(1)} = N_{A(1)} \cdot \cos \gamma, \quad N_{AY(1)} = N_{A(1)} \cdot \sin \gamma, \quad (24)$$

$$F_{X(1)} = F_{\tau(1)} \cdot \cos \alpha, \quad F_{Y(1)} = F_{\tau(1)} \cdot \sin \alpha. \quad (25)$$

Из (21), (22) получим

$$N_{AX(1)} = F_1 - F_{X(1)}, \quad (26)$$

$$N_{AY(1)} = F_{Y(1)}. \quad (27)$$

Из (23) с учетом (11), (12) получим

$$M_A = (F_{Y'(1)} - N_{AY'(1)}) \cdot l_{a1} - (F_{Y'(2)} + N_{AY'(2)}) \cdot l_m + (F_{Y'(1)} + N_{AY'(1)}) \cdot l_m = 0. \quad (28)$$

Величины сил  $\vec{F}_{\tau(1)}$  и  $\vec{F}_{\tau(2)}$ , действующих в плоскостях границы раздела аустенит/мартенсит, могут быть найдены из соотношений:

$$F_{\tau(1)} = \frac{F_{Y(1)}}{\sin \alpha}, \quad (29)$$

$$F_{\tau(2)} = -\frac{F_{Y(2)}}{\sin \alpha}. \quad (30)$$

**Численные расчеты для случая одноосного растяжения.** Используя данное в работе [2] соотношение параметров кристаллической решетки  $c/a = 0,94$  (здесь  $a$  и  $c$  – кристаллической решетки), найдем угол поворота границ раздела аустенит/мартенсит к поверхности кристалла:

$$\psi = \arctan\left(\frac{c}{a}\right) = 43,23^\circ. \quad (31)$$

Угол поворота мартенситной прослойки относительно поверхности кристалла находим по формуле [2]:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - 2\psi = 3,54^\circ. \quad (32)$$

Примем высоту аустенитного объема равной  $h = 2$  мм и толщину образца  $b = 2$  мм, тогда высота мартенситной прослойки [2]:

$$h_1 = h \frac{a}{c} = 1,88 \text{ мм}. \quad (33)$$

В статической задаче примем за известные: углы:  $\psi = 43,23^\circ$ ,  $\alpha = 39,69^\circ$ ,  $\beta = 86,46^\circ$ ,  $\tau = 3,54^\circ$ ,  $\delta = 3,54^\circ$ ,  $\gamma = 46,77^\circ$ ; силы:  $F_1 = 2$  МПа,  $F_2 = 2$  МПа; длины:  $l_a = 1,56$  мм,  $l_m = 0,47$  мм.

Тогда численные значения сил:  $F_{\tau(1)}$ ,  $F_{\tau(2)}$ ,  $F_{X(1)}$ ,  $F_{Y(1)}$ ,  $F_{X(2)}$ ,  $F_{Y(2)}$ ,  $N_{A(1)}$ ,  $N_{A(2)}$ ,  $N_{AX(1)}$ ,  $N_{AY(1)}$ ,  $N_{AX(2)}$ ,  $N_{AY(2)}$ ,  $F'_{X(1)}$ ,  $F'_{Y(1)}$ ,  $F'_{X(2)}$ ,  $F'_{Y(2)}$ ,  $N'_{AX(1)}$ ,  $N'_{AY(1)}$ ,  $N'_{AX(2)}$ ,  $N'_{AY(2)}$ ,  $M_D$ ,  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $M_C$ , исходя из формул (5)–(12), (16)–(20), (24)–(28), (29), (30), будет иметь следующие численные значения:  $F_{X(1)} = 1,12$  МПа,  $F_{Y(1)} = 0,93$  МПа,  $F_{X(2)} = 1,12$  МПа,  $F_{Y(2)} = 0,93$  МПа,  $N_{AX(1)} = 0,88$  МПа,  $N_{AY(1)} = 0,93$  МПа,  $N_{AX(2)} = 0,88$  МПа,  $N_{AY(2)} = 0,93$  МПа,  $N_{A(1)} = 1,28$  МПа,  $N_{A(2)} = 1,28$  МПа,  $F_{\tau(1)} = 1,46$  МПа,  $F_{\tau(2)} = 1,46$  МПа,  $F'_{X(1)} = 0,09$  МПа,  $F'_{Y(1)} = 1,46$  МПа,  $F'_{X(2)} = 0,09$  МПа,  $F'_{Y(2)} = 1,46$  МПа,  $N'_{AX(1)} = 1,28$  МПа,  $N'_{AY(1)} = 0,08$  МПа,  $N'_{AX(2)} = 1,28$  МПа,

$N'_{AY(2)} = 0,08$  МПа,  $M_D = 0$  МПа·мм;  $M_A = 0$  МПа·мм;  $M_B = 0,72$  МПа·мм;  
 $M_C = 0,72$  МПа·мм.

**Постановка задачи для случая одноосного сжатия.**

На рис. 2 представлен механически нагруженный заданными силами сжатия ( $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ ) призматический ферромагнитный кристалл с эффектом памяти формы. Величины сил сжатия  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  направленные вдоль оси X, а также длины аустенитных и мартенситной частей ( $l_{a1}$ ,  $l_{a2}$  и  $l_m$ ), как и ранее, примем за известные. Из рис. 2 видно, что при действии на торцах образца сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  на границах раздела возникают силы нормальной реакции  $\vec{N}_{A(1)}$  и  $\vec{N}_{A(2)}$ , а также сдвиговые силы  $\vec{F}_{\tau(1)}$  и  $\vec{F}_{\tau(2)}$ , действующие вдоль границ раздела, которые необходимо определить.

**Решение статической задачи при одноосном сжатии.**

1. Для мартенситной прослойки для обеспечения статического равновесия должны выполняться условия (рис. 2):

$$\sum F_{iX'} = -N_{AX'(1)} + F_{X'(1)} + N_{AX'(2)} - F_{X'(2)} = 0; \quad (34)$$

$$\sum F_{iY'} = -F_{Y'(1)} - N_{AY'(1)} + N_{AY'(2)} + F_{Y'(2)} = 0. \quad (35)$$

Система уравнений (34) и (35) может быть дополнена условиями равновесия для моментов сил:

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = (F_{Y'(2)} + N_{AY'(2)}) \cdot l_m + M_B = 0; \quad (36)$$

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = -(F_{Y'(1)} + N_{AY'(1)}) \cdot l_m - M_C = 0. \quad (37)$$

В уравнениях (34)–(37) выполнены замены (5)–(8).

Из (34), (35) получим

$$F_{X'(1)} = N_{AX'(1)} - N_{AX'(2)} + F_{X'(2)}; \quad (38)$$

$$F_{Y'(2)} = F_{Y'(1)} + N_{AY'(1)} - N_{AY'(2)}. \quad (39)$$

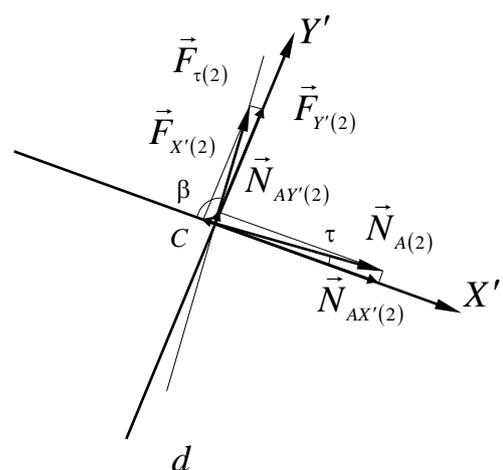
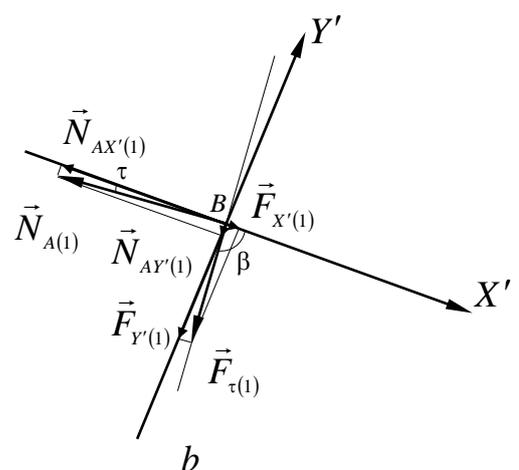
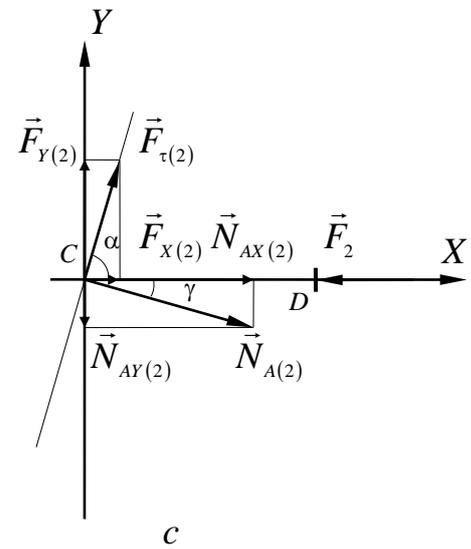
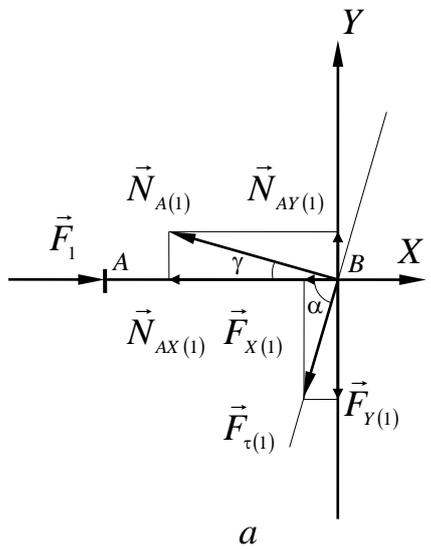
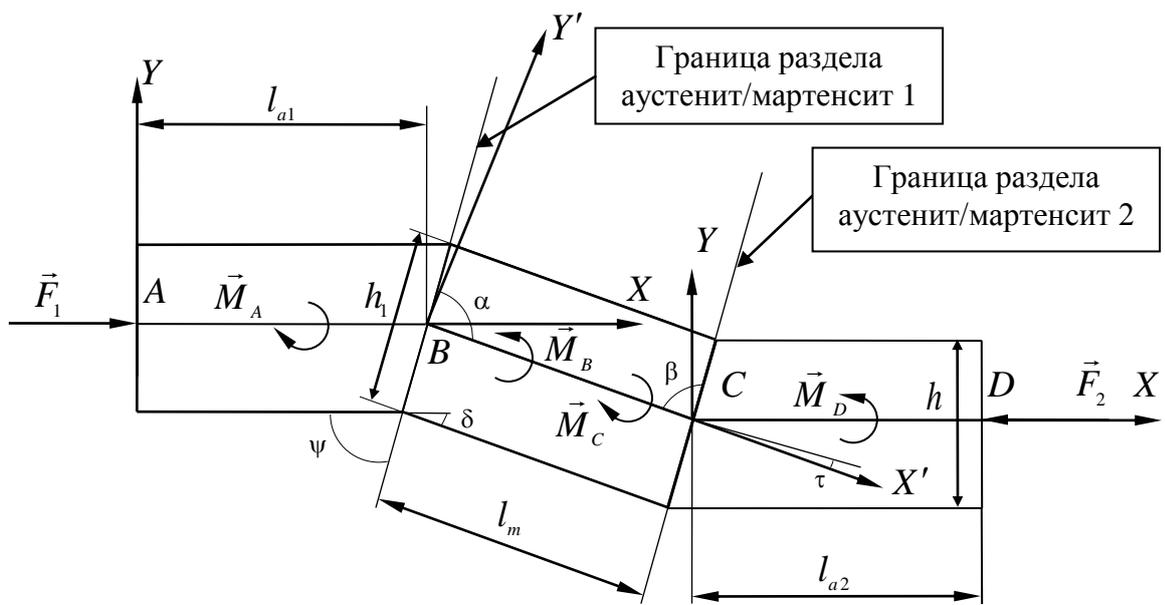


Рис. 2. Схематическое изображение, подвергнутого одноосному сжатию призматического ферромагнитного кристалла с эффектом памяти формы

Из (36) будем иметь

$$M_B = -\left(F_{Y'(2)} - N_{AY'(2)}\right) \cdot l_m = 0, \quad (40)$$

а из (37) –

$$M_C = -\left(F_{Y'(1)} - N_{AY'(1)}\right) \cdot l_m = 0. \quad (41)$$

2. Для аустенитной части призматического кристалла, на который действует одна из растягивающих сил, сила  $\vec{F}_2$  (рис. 2), будем иметь

$$\sum F_{iX} = -F_2 + F_{X(2)} + N_{AX(2)} = 0; \quad (42)$$

$$\sum F_{iY} = F_{Y(2)} - N_{AY(2)} = 0; \quad (43)$$

$$\sum M_D(F_i) = \left(F_{Y(2)} - N_{AY(2)}\right) \cdot l_{a2} + M_D - M_C + M_B = 0. \quad (44)$$

В уравнениях (42)–(44) выполнены замены (16), (17).

Из (42), (43) получим:

$$N_{AX(2)} = F_2 - F_{X(2)}; \quad (45)$$

$$N_{AY(2)} = F_{Y(2)}. \quad (46)$$

Из (44) с учетом (40), (41), следует:

$$\begin{aligned} M_D = & -\left(F_{Y(2)} - N_{AY(2)}\right) \cdot l_{a2} - \left(F_{Y'(2)} - N_{AY'(2)}\right) \cdot l_m + \\ & + \left(F_{Y'(2)} - N_{AY'(2)}\right) \cdot l_m. \end{aligned} \quad (47)$$

3. Для аустенитной части ферромагнитного кристалла, на который действует вторая из растягивающих сил, сила  $\vec{F}_1$  (рис. 2), будем иметь:

$$\sum F_{ix} = -N_{AX(1)} - F_{X(1)} + F_1 = 0; \quad (48)$$

$$\sum F_{iy} = N_{AY(1)} - F_{Y(1)} = 0; \quad (49)$$

$$\sum M_A(F_i) = \left(F_{Y'(1)} - N_{AY'(1)}\right) \cdot l_{a1} - M_A - M_B + M_C = 0. \quad (50)$$

В уравнениях (48)–(50) выполнены замены (24) и (25).  
Из (48), (49) получим:

$$N_{AX(1)} = F_1 - F_{X(1)}; \quad (51)$$

$$N_{AY(1)} = F_{Y(1)}. \quad (52)$$

Из (50), с учетом (40) и (41), следует:

$$M_A = \left( F_{Y'(1)} - N_{AY'(1)} \right) \cdot l_{a1} + \left( F_{Y'(2)} - N_{AY'(2)} \right) \cdot l_m - \left( F_{Y'(2)} - N_{AY'(2)} \right) \cdot l_m = 0. \quad (53)$$

Величины сил  $\vec{F}_{\tau(1)}$  и  $\vec{F}_{\tau(2)}$ , действующих в плоскостях границы раздела аустенит/мартенсит, могут быть найдены из соотношения:

$$F_{\tau(1)} = -\frac{F_{Y(1)}}{\sin \alpha}, \quad (54)$$

$$F_{\tau(2)} = \frac{F_{Y(2)}}{\sin \alpha}. \quad (55)$$

**Численные расчеты для случая одноосного сжатия.** Величины углов и длин аналогичны принятым в случае одноосного растяжения, а величины сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  примем равными 3 МПа. Тогда  $F_{X(1)} = 1,69$  МПа,  $F_{Y(1)} = 1,4$  МПа,  $F_{\tau(1)} = 2,19$  МПа,  $F_{\tau(2)} = 2,19$  МПа,  $N_{AX(1)} = 1,32$  МПа,  $N_{AY(1)} = 1,4$  МПа,  $N_{AX(2)} = 1,32$  МПа,  $N_{AY(2)} = 1,4$  МПа,  $N_{A(1)} = 1,92$  МПа,  $N_{A(2)} = 1,92$  МПа,  $F_{X(2)} = 1,69$  МПа,  $F_{Y(2)} = 1,4$  МПа,  $F'_{X(1)} = 0,14$  МПа,  $F'_{Y(1)} = 2,19$  МПа,  $F'_{X(2)} = 0,14$  МПа,  $F'_{Y(2)} = 2,19$  МПа,  $N'_{AX(1)} = 1,91$  МПа,  $N'_{AY(1)} = 0,12$  МПа,  $N'_{AX(2)} = 1,91$  МПа,  $N'_{AY(2)} = 0,12$  МПа,  $M_D = 0$  МПа·мм;  $M_A = 0$  МПа·мм,  $M_B = -0,97$  МПа·мм;  $M_C = -0,97$  МПа·мм.

**Вывод.** Классическими методами механики решена статическая задача о расчете сил, действующих вдоль границ раздела аустенит/мартенсит в единичной мартенситной прослойке в случае одноосного растяжения/сжатия призматического ферромагнитного кристалла с памятью формы. Полученные результаты имеют важное значение для расчетов технологических параметров устройств, использующих в качестве рабочего элемента ферромагнитные кристаллы с эффектом запоминания формы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Laitinen, V. Giant 5.8% magnetic-field-induced strain in additive manufactured Ni-Mn-Ga magnetic shape memory alloy / V. Laitinen, A. Saren, A. Sozinov, K. Ullakko // *Scripta Materialia*. – 2022. – V. 208. – P. 114324.
2. Saren, A. Dynamic twinning stress and viscous-like damping of twin boundary motion in magnetic shape memory alloy Ni – Mn – Ga / A. Saren, K. Ullakko // *Scripta Materialia*. – 2017. – V. 139. – P. 126–129.
3. O’Handley, R. C. Phenomenology of giant magnetic-field induced strain in ferromagnetic shape-memory materials / R. C. O’Handley, S. J. Murrey, M. Marioni, H. Nembach, S. M. Allen // *J. Appl. Phys.* – 2000. – V. 87. – P. 4712–4717.
4. Murrey, S. J. 6% magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic Ni – Mn – Ga / S. J. Murrey, M. Marioni, S. M. Allen, R. C. O’Handley // *Appl. Phys. Lett.* – 2000. – V. 77. – P. 886–888.
5. Ullakko, K. Magnetically controlled shape memory alloys: a new class of actuator materials / K. Ullakko // *JMEP*. – 1996. – V. 5. – P. 405–409.
6. James, R. D. Large field-induced strains in ferromagnetic shape memory materials / R. D. James, R. Tickle, M. Wuttig // *Materials Science and Engineering*. – 1999. – V. A273–275. – P. 320–325.
7. Tickle, R. Ferromagnetic shape memory in the NiMnGa system / R. Tickle, R. D. James, T. Shield, M. Wuttig, V. V. Kokorin // *IEEE Transactions on Magnetics*. – 1999. – V. 35. – P. 4301–4310.
8. Остриков, В. О. Статика и динамика границы раздела аустенит/мартенсит в нагруженном призматическом монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке / В. О. Остриков, О. М. Остриков // *Машиностроение : республиканский межведомственный сборник научных трудов / Белорусский национальный технический университет ; редкол.: В. К. Шелег (гл. ред.) [и др.]*. – Минск : БНТУ, 2021. – Вып. 33. – С. 139–147.
9. Остриков, В. О. Статическая и динамическая задача для единичной мартенситной прослойки в ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в магнитном поле в жесткой заделке / В. О. Остриков, О. М. Остриков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2023. – № 1(54). – С. 43–46.
10. Василевич, Ю. В. Статика и динамика границы раздела аустенит / мартенсит в призматическом ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке и магнитном поле / Ю. В. Василевич, В. О. Остриков, О. М. Остриков // *Машиностроение : республиканский межведомственный сборник научных трудов / Белорусский национальный технический университет ; редкол.: В. К. Шелег (гл. ред.) [и др.]*. – Минск: БНТУ, 2023. – Вып. 34. – С. 131–139.
11. Василевич, Ю. В. Статика и динамика границ раздела аустенит / мартенсит мартенситной прослойки в нагруженном призматическом ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке / Ю. В. Василевич, В. О. Остриков, О. М. Остриков // *Машиностроение : республиканский межведомственный сборник научных трудов / Белорусский национальный технический университет ; редкол.: В. К. Шелег (гл. ред.) [и др.]*. – Минск : БНТУ, 2023. – Вып. 34. – С. 139–146.
12. Остриков, В. О. Расчет сил, действующих на непараллельных границах раздела аустенит / мартенсит в ферромагнитном монокристалле с памятью формы, находящемся в жесткой заделке / В. О. Остриков, О. М. Остриков // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Естественные науки*. – 2024. – № 3 (144). – С. 116–121.

*Поступила 31.03.2025*