Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. Н. ЯСТРЕБОВ

ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 18 IX 1951)

В пространстве непрерывной группы Ли внутренним образом определяются две аффинные связности нулевой кривизны, инвариантные относительно групповых операций ([1,3]). Каждая из связностей вносит в групповое пространство свой абсолютный параллелизм — параллелизм I рода и параллелизм II рода. Обе связности обладают одним и тем же семейством геодезических линий. Геодезическими линиями являются однопараметрические подгруппы и их классы смежности.

Существенны следующие два свойства групповых параллелизмов: а) Пусть a и b — две геодезические линии, параллельные между собой в I связности (во II связности), и геодезическая m пересекает a и b. Тогда всякая геодезическая l, параллельная m во II связности (в I связности) и пересекающая a, пересекает и b.

б) Если отрезки геодезических a и b, заключенные между m и l (свойство а), считать равными векторами, то определенное таким образом равенство векторов носит транзитивный характер.

Обратно, исходя из семейства путей со свойствами а) и б), можно восстановить группу.

Поставим задачу отыскания двух аффинных связностей, обобщающих групповые связности. Именно, рассмотрим связности с абсолютным параллелизмом направлений, геодезические линии которых обладают обязательно лишь свойством а).

Решая поставленную задачу, можно, не нарушая общности, перейти к связностям нулевой кривизны. Коэффициенты рассматриваемых связностей $\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\nu}$ и $\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\nu}$ должны тогда удовлетворять следующему соотношению:

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\nu} + \delta^{\alpha}_{\mu}\,\overset{1}{\omega}_{\nu} = \overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\nu\mu} + \delta^{\alpha}_{\nu}\,\overset{2}{\omega}_{\mu}; \tag{1}$$

$\overset{1}{\omega}_{\mu}$ и $\overset{2}{\omega}_{\nu}$ здесь некоторые ковариантные векторы.

Существование векторов $\overset{1}{\omega}_{\mu} = \overset{1}{\omega}_{\mu}(x^1, \ldots, x^n)$ *и* $\overset{2}{\omega}_{\nu} = \overset{2}{\omega}_{\nu}(x^1, \ldots, x^n)$ *таких, что имеет место* (1), *является условием, необходимым и достаточным для того, чтобы в общем для* $\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\nu}$ *и* $\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\nu}$ *многообразии геодезических линий выполнялось свойство* а).

Выберем n векторов $A^{\alpha}_1, \ldots, A^{\alpha}_n$, параллельно переносимых в I связности. Пусть $B^{\alpha}_1, \ldots, B^{\alpha}_n$ — n векторов, выбранных аналогично для II связности. Рассматривая $A^{\alpha}_1, \ldots, A^{\alpha}_n$ и $B^{\alpha}_1, \ldots, B^{\alpha}_n$ как коэффициенты линейных дифференциальных операторов $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$, соотношение (1) можно переписать так:

$$[A_i B_j] = p_j A_i + q_i B_j. \tag{2}$$

Условия (1) и (2) равносильны. От (1) всегда можно перейти к (2), и наоборот.

Введем для каждой из связностей структурные коэффициенты: C_{ij}^l для $A_1, \ldots, A_n$ и D_{ij}^l для связности $B_1, \ldots, B_n$:

$$[A_i A_j] = C_{ij}^{\alpha} A_{\alpha}, \quad [B_i B_j] = D_{ij}^{\alpha} B_{\alpha}.$$

Заметим далее, что по смыслу задачи операторы $A_1, \ldots, A_n$ рассматриваются с точностью до произвольного скалярного множителя $\theta = \theta(x^1, \ldots, x^n)$, общего для всех A_i. Действительно, переходя от $A_1, \ldots, A_n$ к $\theta A_1, \ldots, \theta A_n$, мы сохраняем геодезические линии и параллелизм направлений I связности. Это же относится и ко II связности.

Случай

$$C_{ij}^{\mu} q_{\mu} - A_i q_j + A_j q_i = D_{ij}^{\mu} p_{\mu} - B_i p_j + B_j p_i = 0 \quad (\text{для всех } i \text{ и } j)$$

соответствует групповому пространству.

При

$$C_{ij}^{\mu} q_{\mu} - A_i q_j + A_j q_i \neq 0 \quad (\text{хотя бы для некоторых } i \text{ и } j) \tag{3}$$

получаются пространства существенно иного типа. В этом случае удобно перейти к специальным каноническим координатам $u^1, \ldots, u^n$. В канонических координатах $A_1, \ldots, A_n$ (или $\theta A_1, \ldots, \theta A_n$) записываются таким образом:

$$A_i^{\alpha} = a_{\mu i} u^{\mu} u^{\alpha} + \delta_i^{\alpha}; \tag{4}$$

аналогично

$$B_j^{\alpha} = - a_{\mu j} u^{\mu} u^{\alpha} + \delta_j^{\alpha}; \tag{5}$$

$a_{ij} = - a_{ji}$ при этом постоянные.

В случае (3) при $n \geqslant 4$ к виду (4) и (5) приводятся операторы любых двух систем $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$, удовлетворяющих (2) и заданных с точностью до скалярного множителя.

Для коэффициентов $\overset{1}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^{\alpha}$ и $\overset{2}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^{\alpha}$ получаются следующие формулы:

$$\overset{1}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^{\alpha} = u^{\alpha} (- a_{\sigma\mu} a_{\varepsilon\nu} u^{\sigma} u^{\varepsilon} + a_{\mu\nu}) - \delta_{\nu}^{\alpha} a_{\sigma\mu} u^{\sigma} \tag{6}$$

и

$$\overset{2}{\Gamma}{}_{\mu\nu}^{\alpha} = u^{\alpha} (- a_{\sigma\mu} a_{\varepsilon\nu} u^{\sigma} u^{\varepsilon} - a_{\mu\nu}) + \delta_{\nu}^{\alpha} a_{\sigma\mu} u^{\sigma}. \tag{7}$$

Коэффициенты (6) и (7) (и операторы (4) и (5)) вполне определяются заданием постоянного бивектора a_{ij}. Пространство, где определены связности (6) и (7), мы назовем P_n. Окончательно, имеет место следующее предложение:

При $n \geqslant 4$ пространства P_n являются единственным классом пространств, обладающих свойством а) *и не являющихся групповыми пространствами.*

Разумеется, здесь имеется в виду сделанное выше замечание.

При $n = 2$ свойство а) делается тривиальным. Этим свойством обладает любая пара связностей без кривизны. При $n = 3$ вопрос о единственности пространств P_n в классе пространств, не являющихся групповыми и удовлетворяющих свойству а), требует специального рассмотрения.

Достаточно просто устанавливается следующий результат.

P_n обладает центром. Группа движений P_n является стационарной, оставляющей центр инвариантным. Эта группа изоморфна симплектической подгруппе однородной аффинной группы. В канонических координатах центром является точка $O(0, \ldots, 0)$.

Если рассмотреть аффинный образ P_n, считая канонические координаты $u^1, \ldots, u^n$ одновременно координатами точки в аффинном пространстве, то задание центра P_n и бивектора a_{ij} приводит к центросимплектическому пространству Σ_n. Σ_n — n-мерное линейное пространство с заданной билинейной кососимметрической формой. Геодезические линии P_n, не проходящие через $O(0, \ldots, 0)$, отображаются на гиперболы с центром в начале координат. Для геодезических P_n, проходящих через центр пространства, образом в Σ_n служат прямые центральной связки. Таким образом P_n *является субпроективным пространством.* a_{ij} индуцирует в Σ_n метрику двумерных площадей. Для бивектора $\{u, v\}$ эта площадь задается формулой:

$$[uv] = {}^1/_2 a_{\mu\nu} u^\mu v^\nu. \tag{8}$$

Параллельному перенесению вектора $a^\mu \in P_n$ из центра в точку $M(u^1, \ldots, u^n)$ соответствует в Σ_n следующее преобразование:

$$\tilde{a} = a_0 + [ra_0]\, r.$$

Здесь $a_0 \in \Sigma_n$ соответствует a^μ, взятому в P_n в $O(0, \ldots, 0)$ и $\tilde{a}$ — вектору a^μ в точке $M(u^1, \ldots, u^n)$; r — радиус-вектор точки $M(u^1, \ldots, u^n)$ в Σ_n.

Назовем допустимыми те гиперболы Σ_n, для которых площадь треугольника, образованного касательной и асимптотами в метрике, задаваемой формой (8), равна 1. С помощью бивектора a_{ij} эти гиперболы можно ориентировать, т. е. однозначно определить на каждой из них $+$ направление. Тогда *конгруенция параллельных между собой в связности $\overset{1}{\Gamma}{}^\alpha_{\mu\nu}$ геодезических отображается в Σ_n на семейство допустимых гипербол, имеющих в $+$ направлении общую асимптоту.*

При переходе к связности $\overset{2}{\Gamma}{}^\alpha_{\mu\nu}$ вместо положительного направления появляется отрицательное. Форма (8) меняет в этом случае знак.

Двумерные поверхности S, определяемые в P_n свойством а), отображаются в Σ_n на однополостные и двуполостные гиперболоиды. В зависимости от ранга a_{ij} гиперболы, на которые отображаются геодезические P_n, могут вырождаться в прямые линии; точно так же в Σ_n поверхностями S могут служить гиперболические цилиндры и плоскости.

Кручение $\overset{1}{S}{}^\alpha_{\mu\nu}$ пространства P_n определяется так:

$$\overset{1}{S}{}^\alpha_{\mu\nu} = \rho^\alpha_{\sigma\mu\nu} u^\sigma; \tag{9}$$

здесь $\rho^\alpha_{\varepsilon\mu\nu}$ — постоянный в координатах u тензор.

Ковариантная производная $\overset{1}{S}{}^\alpha_{\mu\nu}$ имеет следующий вид:

$$\nabla_\varepsilon \overset{1}{S}{}^\alpha_{\mu\nu} = \rho^\alpha_{\varepsilon\mu\nu} + u_\varepsilon \overset{1}{S}{}^\alpha_{\mu\nu}. \tag{10}$$

(9) и (10) определяют поведение кручения при параллельном сдвиге в P_n. Например, если задаться в точке $M(u^1, \ldots, u^n)$ определенной

элементарной площадкой $\xi^{\mu\nu}$, то (10) означает, что при параллельном сдвиге δu к вектору кручения $\chi^\alpha = S^\alpha_{\mu\nu}\xi^{\mu\nu}$ добавляется кручение в точке $M_\delta(\delta u^1, \ldots, \delta u^n)$ и самый вектор χ^α, умноженный на площадь бивектора $[u, \delta u]$. Если смещаться параллельно вдоль геодезической OM, т. е. радиальным образом, то вектор χ^α сохраняет свое направление.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. П. К. Рашевскому за постановку проблемы и руководство.

Черновицкий государственный университет

Поступило 28 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Картан, Геометрия групп преобразований, Сборн. статей. Геометрия групп Ли и симметрические пространства, 1949. [2] В. Ф. Каган, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. I, 2 (1933). [3] J. A. Schouten, Math. Ann., 102 (1930).