Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

И. Ю. ХАРРИК

К ПРОБЛЕМЕ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННОЙ С ИССЛЕДОВАНИЕМ СХОДИМОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 VIII 1951)

В настоящей работе приводятся некоторые результаты, относящиеся к проблеме аппроксимации функций выражениями вида $\varphi(x, y) P(x, y)$ (P — полином), более точно сформулированной в нашей работе [1], и указываются их применения к исследованию сходимости метода Ритца. В дальнейшем мы используем определения и обозначения, введенные в упомянутой работе.

Теорема 1. *D — ограниченная замкнутая область двумерного пространства, Γ — ее граница и $\varphi(x, y)$ — функция, определенная в открытой области, содержащей D, удовлетворяющая условиям:*

1) $\varphi(x, y) = 0$, *если* $(x; y) \in \Gamma$; $\varphi(x, y) \neq 0$, *если* $(x, y) \overline{\in} \Gamma$;

2) $\varphi(x, y)$ *непрерывно дифференцируема k раз* $(k \geqslant 1)$ *и функции* $\partial^k\varphi / \partial x^\nu \partial y^{k-\nu}$ *при* $0 \leqslant \nu \leqslant k$ *удовлетворяют условию Липшица;*

3) $\operatorname{grad}\varphi(x, y) \neq 0$, *если* $(x; y) \in \Gamma$.

Пусть $u(x; y)$ — функция, непрерывно дифференцируемая в D k раз и обращающаяся в нуль на Γ.

Тогда можно указать последовательность полиномов $P_n(x, y)$ (степени $\leqslant n$ относительно каждого из переменных x и y) такую, что

$$\| u - \varphi P_n \|_c = O\left(\frac{\omega_c^{[k]}\left(u; \frac{1}{n}\right)}{n^k} \right),$$

где $\omega_c^{[k]}\left(u; \frac{1}{n}\right) = \max\limits_{0 \leqslant \nu \leqslant k} \omega_c\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^\nu \partial y^{k-\nu}}; \frac{1}{n} \right)$ ($\omega_c(u, \delta)$ — *модуль непрерывности функции* u).

Кроме того, при $k \geqslant 2$ имеет место оценка

$$\left\| \frac{\partial^r}{\partial x^\nu \partial y^{r-\nu}} (u - \varphi P_n) \right\|_c = O\left(\frac{\omega_c^{[k]}\left(u; \frac{1}{n}\right)}{n^{k-r}} \right),$$

если $0 \leqslant \nu \leqslant r < k$.

Наметим доказательство теоремы.

Не ограничивая общности, можно считать, что область D заключена в квадрате $(-1 + 2\delta;\ 1 - 2\delta;\ -1 + 2\delta;\ 1 - 2\delta)$, где $0 < \delta < {}^1/_2$. Распространим функции $u(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ на квадрат $[-1; 1; -1; 1]$ таким образом, чтобы полученные после распространения функции $u^*(x, y)$ и $\varphi^*(x, y)$ были k раз непрерывно дифференцируемы, чтобы

$\omega_c^{[k]}(u^*;\varepsilon)$ и $\omega_c^{[k]}(\varphi^*;\varepsilon)$ имели при $\varepsilon\to 0$ порядок малости, соответственно, $\omega_c^{[k]}(u;\varepsilon)$ и ε и чтобы, кроме того, функция $u^*(x,y)$ вне квадрата $(-1+\delta;\ 1-\delta;\ -1+\delta;\ 1-\delta)$ была равна нулю, а функция $\varphi^*(x,y)$ не обращалась в нуль вне Γ.

Определим функцию $v(x,y)$ в квадрате $[-1;\ 1;\ -1;\ 1]$ следующим образом:

$$v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{u^*(x,y)}{\varphi^*(x,y)}, & \text{если}\quad (x;y)\,\overline{\in}\,\Gamma,\\[2ex] \dfrac{\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x;\,y)}}{\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{(x;\,y)}}, & \text{если}\quad (x;y)\in\Gamma,\end{cases}$$

где $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x;\,y)}$ и $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{(x;\,y)}$ при $(x;y)\in\Gamma$ обозначают производные по нормали к Γ в точке $(x;y)$.

Введем в рассмотрение 2π-периодическую четную функцию $\tilde v(\xi,\eta)=v(\cos\xi,\ \cos\eta)$.

Для каждого целого положительного числа n определим индуктивно последовательность функций $F_n^k(\tilde v;\ \xi,\eta)$ $(k=1,2,\ldots)$ следующим образом:

$$F_n^1(\tilde v;\xi,\eta)=\tilde v(\xi,\eta)-T_n(\tilde v;\xi,\eta)$$

(T_n — полином Джексона для $\tilde v$).

Предполагая функции $F_n^\nu(\tilde v;\xi,\eta)$ определенными при $\nu\leqslant r-1$, положим

$$F_n^r(\tilde v;\xi,\eta)=F_n^1(F_n^{r-1}(\tilde v;\xi,\eta)).$$

Очевидно, что при любом r функция $F_n^r(\tilde v;\xi,\eta)-\tilde v(\xi,\eta)$ является тригонометрическим полиномом степени $\leqslant n$, содержащим лишь косинусы и, следовательно, может быть представлена в форме:

$$F_n^r(\tilde v;\xi,\eta)-\tilde v(\xi,\eta)=\sum_{i,\,j=0}^{n}a_{ij}^{n,\,r}(\cos\xi)^i(\cos\eta)^j.$$

Полагая

$$P_n(x,y)=-\sum_{i,\,j=0}^{n}a_{i,\,j}^{n,\,k+1}x^iy^j,$$

мы получаем последовательность полиномов степени $\leqslant n$ относительно x и y. Можно доказать, что полиномы $P_n(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Несколько изменяя построение полиномов $P_n(x,y)$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $D,\Gamma,\varphi(x,y)$ и $u(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и, кроме того,* $\operatorname{grad}u(x,y)=0$ *при* $(x;y)\in\Gamma$.

Тогда, если $k\geqslant 2$, можно указать последовательность полиномов $R_n(x,y)$ (степени $\leqslant n$ относительно каждого из переменных x и y) такую, что

$$\|u-\varphi^2R_n\|_c=O\left(\frac{\omega_c^{[k]}\left(u;\ \frac{1}{n}\right)}{n^k}\right).$$

Если $k \geqslant 3$, то имеет место оценка

$$\left\| \frac{\partial^r}{\partial x^\nu \partial y^{r-\nu}} (u - \varphi^2 R_n) \right\|_c = O\left(\frac{\omega_c^{[k]}\left(u; \frac{1}{n}\right)}{n^{k-r}} \right)$$

для любых ν и r таких, что $0 \leqslant \nu \leqslant r < k-1$.

Приведенные выше теоремы непосредственно распространяются на случай любого числа переменных.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования сходимости метода Ритца в случае самосопряженного уравнения эллиптического типа

$$\sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + b(x_1, \ldots, x_r)\, u = f(x_1, \ldots, x_r); \quad u|_\Gamma = 4, \qquad (*)$$

когда решение разыскивается в форме

$$u_n(x_1, \ldots, x_r) = \varphi(x_1, \ldots, x_r) \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} a_{i_1, \ldots, i_r} x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r}. \qquad (**)$$

Ограничимся рассмотрением уравнения $(*)$ при $r > 2$ (случай $r = 2$ рассмотрен нами в работе [1]).

Из теоремы В. П. Ильина [2] следует равномерная сходимость последовательности функций $u_n(x, \ldots, x_r)$ вида $(**)$ к решению $u(x_1, \ldots, x_r)$ уравнения $(*)$, если только $A(u_n)\, n^{r-2} (\ln n)^{\frac{r-2}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$, где

$$A(u_n) \left\{ \int \cdots \int_D \left(\sum_{i=1}^{r} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(u - u_n) \right]^2 + (u - u_n)^2 \right) dx_1 \ldots dx_r \right\}^{1/2}.$$

При этом

$$\| u - u_n \|_c \leqslant c \left[A(u_n)\, n^{r-2} (\ln n)^{\frac{r-2}{2}} \right]^{\frac{1}{r-1}}.$$

Воспользуемся теоремой 1. Полагая $\bar{u}_n = \varphi P_n$, без труда установим, что

$$A(\bar{u}_n) \leqslant c_1 \frac{\omega_c^{[k]}\left(u; \frac{1}{n}\right)}{n^{k+1}}.$$

Тем более эта оценка будет верна для $A(u_n)$, где u_n — приближенное решение, полученное методом Ритца. Из этого следует, что если $u(x_1, \ldots, x_r)$ — решение уравнения $(*)$, непрерывно дифференцируемое в области D $(r-1)$ раз и $\omega_c^{[r-1]}\left(u; \frac{1}{n}\right) (\ln n)^{\frac{r-2}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$, то имеет место равномерная сходимость метода Ритца и

$$\| u - u_n \|_c = O\left(\left[\omega_c^{[r-1]}\left(u; \frac{1}{n}\right) (\ln n)^{\frac{r-2}{2}} \right]^{\frac{1}{r-1}} \right).$$

В том случае, когда $u(x_1, \ldots, x_r)$ непрерывно дифференцируемо в D k раз $(k \geqslant r)$

$$\| u - u_n \|_c = O\left(\left[\frac{\omega_c^{[r-1]}\left(u; \frac{1}{n}\right)(\ln n)^{\frac{r-2}{2}}}{n^{k-r+1}}\right]^{\frac{1}{r-1}}\right).$$

Теорема 2 может быть использована при установлении результатов аналогичного характера в случае бигармонической задачи:

$$\Delta^2 u = f(x_1, \ldots, x_r); \qquad u\Big|_\Gamma = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0.$$

Поступило
21 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ю. Харрик, ДАН, 80, № 1 (1951). [2] В. П. Ильин, ДАН, 81, № 2 (1951).