Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

К. СИТНИКОВ

О ГОМОЛОГИЧЕСКОМ ОПОЯСЫВАНИИ КОМПАКТОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 IX 1951)

§ 1. Одним из основных результатов гомологической теории размерности является следующая теорема П. С. Александрова ([1,2]).

Пусть Φ *есть* r*-мерный компакт в* n*-мерном евклидовом пространстве* R^n, $r \leqslant n-1$; *существует такое* $\gamma > 0$, *что в* $R^n \setminus \Phi$ *имеется сколь угодно малый по диаметру* $(n-r-1)$*-мерный цикл* v, *не ограничивающий в* $R^n \setminus \Phi$ *никакой цепи диаметра* $\leqslant \gamma$, *тогда как при* $k > r+1$ *и произвольном* $\varepsilon > 0$ *всякий* $(n-k)$*-мерный цикл в* $R^n \setminus \Phi$ *диаметра* $< \varepsilon$ *ограничивает в* $R^n \setminus \Phi$ *цепь диаметра* $< \varepsilon$.

Пусть x — цепь в R^n. Обозначим через $\alpha^p x$, $p \geqslant 0$, нижнюю грань тех $\varepsilon > 0$, для которых существует ε-сдвиг вершин цепи x, посредством которого цепь x вырождается до размерности p, т. е. все ее симплексы переводятся в симплексы размерности $\leqslant p$. Через τx обозначим нижнюю грань тех ε, для которых существует ε-сдвиг вершин x, переводящий x в нулевую цепь. Мною доказано в ([3]), что *при* $\dim \Phi = r$ *существует такое* $\gamma > 0$, *что всякий мешок* v *вокруг* Φ (т. е. $(n-1)$-мерный цикл в $R^n \setminus \Phi$, зацепленный со всеми точками Φ) *удовлетворяет условию* $\alpha^{r-1} v > \gamma$. Так как цикл, гомологичный в $R^n \setminus \Phi$ мешку вокруг Φ, сам есть мешок, то и моя теорема и теорема П. С. Александрова являются частными случаями (при $k=1$, соответственно $k = r+1$) следующего общего предложения:

Теорема. *Пусть* $\Phi \subset R^n$ — *компакт размерности* r. *Существует такое* $\gamma > 0$, *что для любого* $k = 1, 2, \ldots, r+1$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *в* $\Gamma = R^n \setminus \Phi$ *имеется* $(n-k)$*-мерный цикл* v („*пояс размерности* $n-k$ *вокруг* Φ“), *при* $k > 1$ *ограничивающий в* Γ, *для которого**: а) $\alpha^{r-k+1} v < \varepsilon$; б) $\tau v < \varepsilon$, *и который обладает следующими двумя свойствами*:

1) *для всякого цикла* w, *гомологичного циклу* v *в* γ*-окрестности последнего относительно* Γ, *имеем*: $\alpha^{r-k} w > \gamma$;

2) *для всякой цепи* x, *натянутой в* Γ *на* v, *имеем* $\alpha^{r-k+1} x > \gamma$.

С другой стороны, если $s > r$ *и* $k = 1, 2, \ldots, s+1$, *то при любом* $\gamma > 0$ *всякий* $(n-k)$*-мерный цикл* z *в* Γ, *для которого* $\tau z < \gamma$, *гомологичен в своей* γ*-окрестности (относительно* Γ) *некоторому циклу* z', *со сколь угодно малым* $\alpha^{s-k} z'$. *Далее, если* $s > r$ *и* $k = 2, 3, \ldots, s+1$, *то при произвольном* $\gamma > 0$ *всякий* $(n-k)$*-мерный цикл* z, *ограни-*

* При $r < n-1$ условие б) следует из а); при $r = n-1$, наоборот, а) тривиально.

чивающий в Γ, *для которого* $\alpha^{s-k+1}z<\gamma$ (*и* $\tau z<\gamma$ *при* $s=n-1$), *ограничивает в* Γ *цепь* x, *для которой* $\alpha^{s-k+1}x<\gamma$.

§ 2. Наметим доказательство этой теоремы.

1. Расположение r-мерного компакта вблизи r-мерного шара. Пусть f — существенное отображение r-мерного компакта $\Phi\subset R^n$, $0<r<n$, на r-мерный шар T с границей S. Пусть Q^n есть n-мерный куб с границей Q', содержащий внутри Φ. Поместим R^n в R^{2n+1} и пусть $T\subset R^{2n+1}\setminus R^n$. Продолжим f на весь куб Q^n так, чтобы продолженное отображение f было тождественным на Q' и чтобы $f(Q\setminus\Phi)\subset R^{2n+1}\setminus T^r$. Продолженное f аппроксимируем достаточно хорошо топологическим симплициальным отображением h куба Q^n в R^{2n+1} так, чтобы на Q' отображение h было тождественным. Полагаем $h(Q^n)=U^n$. Тогда f представляется в виде $f=f_1h$, где f_1 — малый сдвиг полиэдра U^n.

На $f_1^{-1}(S)\subset h(\Phi)$ лежит цикл $z^{r-1}=\{z_i^{r-1}\}$, ограничивающий в $h(\Phi)$ истинную цепь $x^r=\{x_i^r\}$ так, что, обозначая через s (соответственно, далее, через u^n) ориентацию S (соответственно, U^n), имеем: $\Delta x_i^r=z_i^{r-1}$, $f_1(z_i^{r-1})=c_i s$, $c_i\neq 0$. Обозначим через Π призму, порожденную компактом $h(\Phi)$ при сдвиге f_1; в Π лежит призма $\pi^r=\{\pi_i^r\}$, порожденная при том же сдвиге циклом z^{r-1}.

Пересечем шар T плоскостью R^{2n} пространства R^{2n+1}, проходящей через центр шара T перпендикулярно к одному из его радиусов, и возьмем в ней мешок вокруг $\Pi\cap R^{2n}$, ограничивающий в R^{2n} цепь x^{2n}, являющуюся ориентированным куском пространства R^{2n}. Беря пересечения в R^{2n+1}, положим $z_i^{r-2}=x^{2n}\times z_i^{r-1}$. Полагая $S'=S\cap R^{2n}$, легко находим, что $z_i^{r-2}\sim c_i s'$ в малой окрестности S', а потому $z^{r-2}=\{z_i^{r-2}\}$ есть существенный цикл. При этом, полагая $x^{n-1}=x^{2n}\times u^n$, находим, что $z_i^{r-2}=\Delta(x^{n-1}\times x_i^r)$; заметим еще, что цикл $z^{n-2}=\Delta x^{n-1}$ лежит вне $h(\Phi)$.

2. Построение* пояса v. Возвращаемся обратным гомеоморфизмом h^{-1} в R^n. Цепь $h^{-1}(x^{n-1})$ обозначаем снова через x^{n-1}, ее границу — через z^{n-2}; она лежит вне Φ. Пересечение $x^{n-1}\times z^{r-1}=z^{r-2}$, понимаемое теперь в R^n, есть существенный цикл.

Лемма 1. *При любом* $\sigma>0$ *цепь* x^{n-1} *можно заменить истинной цепью* $y^{n-1}=\{y_i^{n-1}\}$, $\Delta y_i^{n-1}=\Delta x^{n-1}=z^{n-2}$, *носитель которой* $\bar{y}^{n-1}$ *есть компакт, пересекающийся с* Φ *по множеству* Φ_0 *размерности* $\leqslant r-1$. *При этом* y^{n-1} *переходит в* x^{n-1} *посредством* σ-*сдвига*.

В самом деле, пусть g_1 такой σ-сдвиг Φ на r-мерный полиэдр P, что $P\cap\bar{x}^{n-1}$ есть $(r-1)$-мерный полиэдр P'. На P' ретрагируется некоторая (достаточно тесная) окрестность OP'. Продолжаем g_1 на все R^n так, чтобы полученное отображение было тождественным на $\bar{z}^{n-2}$, и аппроксимируем продолженное g_1 симплициальным отображением g так, чтобы ни один симплекс триангуляции, положенной в основу g, не вырождался и чтобы $(g(\Phi)\cap\bar{x}^{n-1})\subset OP'$. Тогда можно говорить о прообразе $g^{-1}(x^{n-1})$ как о симплициальной цепи y', причем $g(\Phi\cap\bar{y}')\subset OP'$, так что (см. [3], стр. 1059, опр. а)) имеем $\alpha^{r-1}(\bar{y}'\cap\Phi)<\sigma$.

---

* Мы проводим его для $k=2$; это ограничение несущественно. В общем случае вместо R^{2n} надо взять R^{2n-k+2}. В основе построения лежит цикл z^{r-1}; лишь немного осложняя рассуждения, можно было бы вместо него взять относительный цикл x^r; так надо поступить, чтобы охватить и случай $k=r+1$, исследованный П. С. Александровым.

Повторным применением этого результата и получается доказательство леммы. Будем предполагать σ столь малым*, чтобы при достаточно большом i для всех истинных циклов $z_i' = y_i^{n-1} \times z^{r-1}$ мера существенности (см. ([3]), определение б)) по отношению к носителям $\supseteq \overline{y}^{n-1} \cap \overline{z}^{r-1}$ превосходила некоторое $\mu > 0$.

Возьмем $\beta > 0$ таким, чтобы для всякого компакта $X \subset O(\Phi_0, 2\beta)$ было $X \cap \overline{z}^{r-1} \subset O(\overline{y}^{n-1} \cap \overline{z}^{r-1}, \mu/2)$ и выбираем γ, $0 < \gamma < \mu/2$, так, чтобы $\alpha^{r-1} O(\Phi_0, 3\gamma) < \beta$; отсюда, в частности, следует, что $3\gamma < \beta$.

Пусть $\varepsilon < \gamma$, в остальном произвольно. Возьмем столь тесную полиэдральную ε-окрестность G множества Φ_0, чтобы $\alpha^{r-1} G < \varepsilon$, и i столь большое, чтобы $\overline{y}_i^{n-1} \cap \Phi \subset G$. Кусок цепи y_i^{n-1}, вырезаемый G обозначим через u_i^{n-1}. Цикл $v = \Delta u_i^{n-1}$ и есть искомый пояс.

3. Первое основное свойство пояса: для всякого $w \sim v$ в $H = O(\overline{v}, \gamma) \cap \Gamma$ имеем $\alpha^{r-2} w > \gamma$.

Доказательство от противного. Пусть посредством γ-сдвига ψ цикл w вырождается до размерности $r-2$; при этом предполагаем, что ни один симплекс призмы π^{n-1} этого сдвига не вырождается. Цепь, натянутую на $w - v$ в H, обозначим через ξ. Цикл $q = u_i^{n-1} + \xi - \pi^{n-1}$ лежит в $O(\Phi_0, 3\gamma)$, и поэтому посредством β-сдвига вырождается до размерности $r-1$. Призму этого β-сдвига обозначаем через π^n. Она лежит в $O(\Phi_0, 2\beta)$. Полагая $\pi^{n-1} \times z^{r-1} = \zeta^{r-2}$, имеем $q \times z^{r-1} = (u_i^{n-1} \times z^{r-1}) - \zeta^{r-2}$. Так как π^n лежит в $O(\overline{\Phi}_0, 2\beta)$, то, в силу выбора β, истинная цепь $\pi^n \times z^{r-1}$ лежит в $O(\overline{y}^{n-1} \cap \overline{z}^{r-1}, \mu/2)$ и $\zeta^{r-2} \sim (u_i^{n-1} \times z^{r-1})$ в $O(\overline{y}^{n-1} \cap \overline{z}^{r-1}, \mu/2)$, откуда следует, что $\mu\zeta^{r-2} > \gamma$. Подвергнем теперь призму π^{n-1} топологическому симплициальному δ-сдвигу (δ достаточно мало) в R^{2n+1} так, чтобы она перешла в призму π_0, расположенную в R^{2n+1} без особенностей. Обратный сдвиг обозначаем через g. Он дает нам сингулярную цепь (π_0, g) (см. ([3]), § 5), пересечение которой с z^{r-1} есть „истинный сингулярный цикл“ (ζ_0^{r-2}, g). По формуле (5) работы ([3]) имеем $g(\zeta_0^{r-2}) = \zeta^{r-2}$, причем $\zeta_0^{r-2} \sim 0$ в $\overline{\pi}_0$ Так как ζ_0^{r-2} переходит посредством δ-сдвига g в ζ^{r-2}, то при достаточно малом δ имеем $\mu\zeta_0^{r-2} > \gamma$, что невозможно, так как $\zeta_0^{r-2} \sim 0$ в $\overline{\pi}_0$ а π_0 переходит посредством γ-сдвига в свое $(r-2)$-мерное основание.

4. Второе основное свойство пояса. Для любой цепи x, натянутой на v в Γ, имеем $\alpha^{r-1} x > \gamma'$, где γ' определяется так: истинная цепь $x^{r-1} = x^{n-1} \times x$ обладает тем свойством, что всякая цепь u^{r-1}, натянутая на $z^{r-2} = \Delta x^{r-1} = x^{n-1} \times z^{r-1}$ в $f^{-1}(S)$, образует вместе с x^{r-1} истинный цикл $x^{r-1} - u^{r-1}$ с мерой существенности, превосходящей некоторое $\lambda > 0$. Беря σ и β достаточно малыми и, во всяком случае, такими, чтобы $\sigma + 2\beta < \lambda/2$, обозначим через γ' наименьшее из чисел γ и $\lambda/2$.

Второе свойство пояса доказывается тоже от противного. Пусть ψ есть γ'-сдвиг цепи x в $(r-1)$-мерный полиэдр. Для призмы π^n этого сдвига имеем $\Delta\pi^n = x - \pi^{n-1}$, где π^{n-1} — призма над v. Без большого труда доказывается, что цикл $\zeta^{r-1} = \Delta(\pi^n \times x^r)$ гомологичен циклу вида $x^{r-1} - u^{r-1}$ в $\lambda/2$-окрестности последнего и, значит, имеет меру существенности $> \lambda/2$.

Имея это в виду, переводим малым топологическим сдвигом призму π^n в призму π_0^n без особенностей; обратный сдвиг g дает, как выше,

$$(\pi^n, g) \times x^r = (x_0^r, g); \quad \Delta(x_0^r, g) = (z_0^{r-1}, g); \quad g(z_0^{r-1}) = \zeta^{r-1},$$

* Мы оставляем за собой право подчинять число σ еще и дальнейшим условиям малости, так же как и числа β, γ, которые сейчас будут введены.

откуда $\mu z_0^{r-1} > \lambda / 2$, а так как $\Delta x_0^r = z_0^{r-1}$, то $\gamma' > \lambda / 2$, вопреки предположению.

5. Последние два утверждения теоремы. Пользуемся обозначениями конца § 1. По лемме имеем цепь u, $\Delta u = z$, лежащую в γ-окрестности цикла z и удовлетворяющую условию $\alpha^{s-k}(\overline{u} \cap \Phi) < \varepsilon$, где ε произвольно. Искомый цикл z' определяется как $\Delta u'$, где u' — кусок, высекаемый из u столь тесной окрестностью $O(\overline{u} \cap \Phi)$, что $\alpha^{s-k} u' < \varepsilon$.

Остается последнее утверждение. Из его предположений следует существование в R^n цепи u_1, $\Delta u_1 = z$, переходящей посредством γ'-сдвига, $\gamma' < \gamma$, в $(s-k+1)$-мерный полиэдр. Возьмем $(\gamma - \gamma')$-сдвиг f пространства R^n в себя, оставляющий z на месте и переводящий Φ в некоторый r-мерный полиэдр P, вне которого z все еще ограничивает некоторую цепь u_2. Берем $(n-k+2)$-мерную цепь u, ограниченную циклом $u_2 - u_1$, и переведем ее в общее положение с P малым сдвигом так, чтобы цепь u_1 испытала лишь топологический сдвиг, тождественный на z, и снова переходила бы посредством γ'-сдвига f_1 в $(s-k+1)$-мерный полиэдр. Тогда полиэдр $\overline{u} \cap P$ имеет размерность $\leqslant s-k+1$ и обладает столь тесной окрестностью H, что $\overline{u}_2$ лежит вне H_1, а $\overline{u}$ (рассматриваемое как тело сингулярной цепи) может быть сдвинуто в себя посредством γ-сдвига f_2 так, что $\overline{u}_1$ переходит в себя, а $H_1 \cap \overline{u}$ отобразится в $P \cap \overline{u}$, и сдвиг $f_1 f_2$ на $\overline{u}_1$ будет снова γ'-сдвигом.

Берем полиэдральную окрестность H_2 множества $\overline{u} \cap P$ с замыканием, лежащим в H_1, и образуем цепь x', вычитая u_2 из границы куска цепи u, лежащего вне H_2, и из цепи u_2. Строим γ-сдвиг φ цепи x' в $(s-k+1)$-мерный полиэдр, полагая $\varphi = f_2$ на куске x', лежащем на границе H_2, и $\varphi = f_1 f_2$ вне H_1. На куске x', попавшем в $H_1 \setminus \overline{H}_2$, строим промежуточный сдвиг между f_2 и $f_1 f_2$, являющийся сдвигом в порожденную отображением f_1 призму над $f_2(\overline{u}_1 \cap P)$ размерности $\leqslant s-k+1$. Как при доказательстве леммы, аппроксимируем сдвиг f симплициальным сдвигом f_0; искомая цепь есть $x = f_0^{-1} x'$.

В заключение выражаю сердечную благодарность П. С. Александрову за постановку решенной здесь задачи и за помощь при редактировании этой работы.

Поступило
12 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Александров, Math. Ann., 106, 161 (1932). [2] П. Александров, Усп. матем. наук, 4, в. 6, 18 (1950). [3] К. Ситников, ДАН, 66, 1059 (1949).