Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. З. ПЕТРОВ

О ПРОСТРАНСТВАХ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 15 IX 1951)

Как известно, пространствами Эйнштейна называются V_n с линейным элементом

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{1}$$

тензор Риччи которых удовлетворяет условию

$$R_{ij} = \varkappa g_{ij}. \tag{2}$$

Необходимым условием существования реального поля тяготения, определяемого уравнениями (2), является требование, чтобы линейный элемент (1) в точке определял геометрию Минковского [1]. Такие V_n обозначим символом T_n и, имея в виду приложения, положим $n=4$. Известно много частных решений уравнений поля (2). В этой заметке ставится задача определить общее решение уравнений (2).

Произведем классификацию T_4. Для этого выделим в T_4 поля тензоров с четным числом ковариантных и контравариантных валентностей. Потребуем, чтобы индексы разбивались на независимые антисимметрические пары, и, сопоставив каждой такой паре один собирательный индекс, обозначим его греческой буквой. Можно убедиться, что таким образом каждой точке P в T_4 сопоставляется локальная центроаффинная геометрия Клейна [2] $\frac{n(n-1)}{2} = 6$ измерений с группой

$$\eta^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\eta^{\alpha}, \quad |A^{\alpha'}_{\alpha}| \neq 0, \quad A^{\alpha'}_{\alpha}A^{\alpha}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}, \quad A^{\alpha'}_{\alpha} \to 2A^{i'j'}_{[ij]}, \quad A^{i'}_{i} = \left(\frac{dx^{i'}}{dx^{i}}\right)_P.$$

Введем в этом многообразии, которое назовем б и в е к т о р н ы м, метрику при помощи неособенного тензора

$$g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk} \to g_{\alpha\beta}, \quad |g_{\alpha\beta}| \neq 0,$$

который будет иметь сигнатуру вида $- - - + + +$.

Введем также одно обобщение понятия римановой кривизны в двумерном направлении:

$$K = \frac{R_{ijkl}v^{ij}v^{kl}}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})v^{ij}v^{kl}} \to \frac{R_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta}}{g_{\alpha\beta}v^{\alpha}v^{\beta}},$$

которое получится, если в этой формуле снять требование простоты бивектора v^{ij}, и назовем K б и в е к т о р н о й к р и в и з н о й V_n. Необходимые и достаточные условия того, чтобы K принимали безусловно-стационарные значения, выражаются уравнениями $(R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta})v^{\beta} = 0$, и ввиду этого классификация T_4 сводится к классификации пары тензоров $R_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ в 6-мерном пространстве, когда тензор $g_{\alpha\beta}$ неособенный и неопределенный. Отсюда следует [3], что верхняя граница числа возможных типов T_4 не превышает 23, элементарные делители матрицы $\| R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta} \|$ могут быть не простыми, а характерные числа — комплексными. Сопоставляя каждой точке T_4 комплексное 4-мерное многообразие, для которого $g_{ii} = 1$, $g_{ij} = 0$, при некоторой нумерации собирательных индексов и соблюдении условий поля (2) получим, что матрица $\| R_{\alpha\beta} \|$ симметрично-сдвоенная [4]. Поэтому в данной точке T_4 матрица $\| R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta} \|$ будет: а) либо простого типа с характеристикой [111 111]; б) либо не простого типа с характеристикой [(33)], а характерные числа ее, которые будут стационарными бивекторными кривизнами T_4, связаны условиями

$$\underset{s}{K} = \underset{s}{\alpha} + i\underset{s}{\beta}, \quad \underset{s+3}{K} = \underset{s}{\alpha} - i\underset{s}{\beta}, \quad \Sigma\underset{s}{\alpha} = \varkappa, \quad \Sigma\underset{s}{\beta} = 0 \quad (s = 1, 2, 3),$$

и, следовательно, для характеристики непростого типа все они равны $\varkappa / 3$.

Дальнейшее исследование матрицы $\| R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta} \|$ основывается на решении вопроса об одновременном приведении к каноническому виду пары тензор — бивектор [3]. Определив структуру бивекторов $v^{ij} \to v^{\alpha}$, т. е. векторов главных направлений $R_{\alpha\beta}$, и имея в виду, что фундаментальный тензор определяется с точностью до произвольного преобразования координат, можно убедиться, что, используя 2 из 6 параметров, матрицу $\| R_{\alpha\beta} \|$ можно привести к виду $\begin{Vmatrix} M & N \\ N & -M \end{Vmatrix}$, где, соответственно,

$$\text{а)}\quad M = \begin{Vmatrix} -\underset{1}{\alpha} & & \\ & -\underset{2}{\alpha} & \\ & & -\underset{3}{\alpha} \end{Vmatrix}, \qquad N = \begin{Vmatrix} -\underset{1}{\beta} & & \\ & -\underset{2}{\beta} & \\ & & -\underset{3}{\beta} \end{Vmatrix};$$

$$\text{б)}\quad M = \begin{Vmatrix} -\frac{\varkappa}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varkappa}{3} & \pm\sqrt{2} \\ 0 & \pm\sqrt{2} & -\frac{\varkappa}{3} \end{Vmatrix}, \qquad N = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \pm\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \pm\sqrt{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

а неголономный репер, для которого имеют место эти соотношения, определяется с 4 степенями свободы. Таким образом, можно утверждать, что существует не более 7 типов полей тяготения. Их можно классифицировать следующим образом. T_4 простого типа с вещественными стационарными кривизнами, определяемые характеристиками: 1) [(11) (11) (11)], 2) [(1111) (11)], 3) [(111 111)]. T_4 простого типа с комплексными стационарными кривизнами, характеристики которых имеют вид: 4) [$\overline{11}\ \overline{11}\ \overline{11}$], 5) [$\overline{(11)\ (11)}\ \overline{11}$], 6) [$\overline{(11)\ (11)}$ (11)]. T_4 не простого типа, отвечающие характеристике 7) [(33)]. Здесь числа с чертами соответствуют комплексно-сопряженным элементарным делителям.

Рассмотрим T_4 первого типа. Воспользуемся коэффициентами вращения Риччи $\gamma_{ijk} = \nabla_q \underset{i}{\xi}_p \underset{j}{\xi}^p \underset{k}{\xi}^q$, где $\underset{i}{\xi}^p$ — координатные векторы неголономного репера, для которого выполняются условия (3). T_4 первого типа допускает голономную систему координат, относительно которой конгруенция $\underset{4}{\xi}^i$, соответствующая времени, — геодезическая. Условия, определяющие такую систему отнесения, можно выразить через коэффициенты вращения. Каждая из конгруенций $\underset{k}{\xi^i}$ зависит от 4 произвольных функций, обеспечивающих 4 степени свободы в выборе неголономного репера. Получаемую таким образом систему уравнений с частными производными первого порядка с 4 неизвестными функциями можно привести к форме, удовлетворяющей всем условиям теоремы существования Коши — Ковалевской ([5]). Пользуясь этой голономной системой координат и накладывая условия поля (2), (3), можно убедиться, что и конгруенции $\underset{k}{\xi^i}$ $(k = 1, 2, 3)$ будут V_3-образующими, т. е. T_4 первого типа допускает голономную ортогональную систему координат.

Как показал Коттон, любое V_3 допускает голономную ортогональную систему координат. Назовем те V_3, у которых ортогональные составляющие тензора кривизны, имеющие более двух различных индексов, обращаются в нуль, голономно-регулярными. Определение таких V_3 является обобщением проблемы Дарбу о триортогональных системах поверхностей на римановы многообразия. Если выразить составляющие фундаментального тензора голономно-регулярного V_3 определенной метрики через коэффициенты Ламе: $\overset{*}{g}_{\alpha\alpha} = \overset{*}{H}{}^2_\alpha$, $\overset{*}{g}_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$, то общее решение уравнений поля (1) для рассматриваемого типа T_4 определится теоремой:

Теорема. *V_4 будут T_4 первого типа тогда и только тогда, если:*

1) *они допускают голономную ортогональную систему отнесения, для которой конгруенция, соответствующая времени x^4, геодезическая, т. е.*

$$g_{\alpha\alpha} = e_\alpha H_\alpha^2, \quad g_{\alpha\beta} = 0, \quad e_\alpha = -1, \quad e_4 = +1, \quad H_4 = 1 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3);$$

2) *коэффициенты Ламе $H_\alpha = H_\alpha(x^4, \overset{*}{H}_\alpha)$, где зависимость H_α от $\overset{*}{H}_\alpha$ определяется вполне интегрируемой системой*

$$\frac{\partial_\beta H_\alpha}{H_\beta} = \frac{\partial_\beta \overset{*}{H}_\alpha}{\overset{*}{H}_\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3; \alpha \neq \beta),$$

решения которой при заданных правых частях зависят от трех произвольных функций одного аргумента, т. е. определяются с точностью до преобразований типа Комбескюра; H_α как функция времени x^4 определяется системой обыкновенных уравнений

$$\frac{H_\alpha''}{H_\alpha} - \frac{H_\beta' H_\gamma' + r_\alpha}{H_\beta H_\gamma} = 0, \qquad \sum_{\beta, \gamma \neq} \frac{1}{H_\beta H_\gamma}(H_\beta' H_\gamma' - r_\alpha) = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq),$$

где $r_\alpha = \overset{*}{R}_{\beta\gamma\beta\gamma}$ — составляющие тензора кривизны любого голономно-регулярного V_3.

Если, в частности, такое T_4 стационарно, т. е. H_α не зависят от времени x^4, то оно будет плоским. Если же H_α зависят только от времени, то они выражаются элементарными функциями и получаемые при этом три решения будут различны в зависимости от того, будет ли $\varkappa \gtreqless 0$. При наложении дополнительных условий из этого общего результата получаются частные решения уравнений (2), указанные Казнером, и некоторые другие.

Для T_4 второго типа общее решение в специальной голономной системе отнесения представится в виде

$$ds^2 = \frac{1}{(\lambda + \nu)^2} \left[I(x^1, x^2) + II(x^3, x^4) \right], \tag{4}$$

т. е. это конформно-приводимые пространства.

Скаляры λ и ν просто связаны с гауссовыми кривизнами поверхностей, определяемых дифференциальными формами $I(x^1, x^2)$ и $II(x^3, x^4)$, и выражаются через эллиптические функции Вейерштрасса $\wp$ от криволинейных координат x^i. Большинство известных в литературе частных решений уравнений поля, например хорошо известное решение Шварцшильда, решения Коттлера, Дельзарта и др., относятся к этому типу поля и могут быть просто получены из (4).

T_4 третьего типа с характеристикой $[(111\ 111)]$ *являются пространствами постоянной кривизны, в каждой точке которых имеет место геометрия Минковского.*

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
20 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, 1948. [2] А. П. Норден, Пространства аффинной связности, 1950. [3] А. З. Петров, Изв. Каз. физ.-мат. об-ва, **109**, 4, 37 (1948); А. З. Петров, Уч. зап. Каз. ун-та, **100**, 3, 5 (1950). [4] В. Ф. Каган, О некоторых системах чисел, к которым приводят лоренцовы преобразования, 1, 1926; 2—3, 1927. [5] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, 1948.