Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. П. НОРДЕН

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ АРГУМЕНТОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 IX 1951)

В работе (1) были рассмотрены основные понятия биаксиальной геометрии, фундаментальная группа которой есть подгруппа проективных преобразований трехмерного пространства, сохраняющих две скрещивающиеся мнимо и сопряженные абсолютные прямые. Прямые, пересекающие обе абсолютные прямые, были названы несобственными, а теперь мы их будем называть особыми. Абсолютно прямые являются двойными прямыми абсолютной пространственной инволюции эллиптического типа, а образы называются сопряженными, если они сопряжены по отношению к абсолютной инволюции. На всякой особой прямой эта инволюция определяет эллиптическую меру расстояний между точками, причем считается, что расстояние между сопряженными точками равно $\pi/2$.

Особые прямые образуют линейную конгруенцию, которая принадлежит абсолютному пучку комплексов. В этом пучке тоже можно ввести эллиптическую меру угла между двумя такими комплексами, который считается равным углу между принадлежащими им прямыми. Прямые, принадлежащие одному комплексу абсолютного пучка, мы называли параллельными, а теперь будем называть псевдопараллельными.

Рассмотрим теперь четырехмерное пространство, фундаментальная группа которого есть подгруппа аффинных преобразований, сохраняющих две бесконечно удаленные сильно мнимые сопряженные прямые. Мы будем называть такое пространство биаффинным и обозначать символом B_4.

Рассматривая совокупность направлений, исходящих из каждой точки B_4, как проективное пространство P_3, мы можем считать, что в этом P_3 определена биаксиальная угловая метрика. Эта метрика задается тензором абсолютной инволюции G_i^j, удовлетворяющей следующим условиям

$$G_k^l G_j^k = -\delta_j^l, \quad G_k^k = 0. \tag{1}$$

Сопряженность векторов характеризуется условием

$$\tilde{a}^l = G_k^l a^k, \quad i, k = 1, 2, 3, 4. \tag{2}$$

Плоскость, содержащую два сопряженных вектора, или, иначе говоря, проходящую через особую бесконечно удаленную прямую, назовем *особой*. Абсолютная инволюция определяет на такой плоскости евклидову геометрию.

Через всякую точку B_4 проходит ∞^2, через всякую прямую одна, а всякая трехмерная плоскость содержит ∞^1 особых плоскостей, причем в последнем случае все они параллельны между собою. Параметрическое уравнение особой плоскости имеет вид

$$x^i = b^i + \lambda a^i + \mu \tilde{a}^i, \tag{3}$$

где a^i и $\tilde{a}^i$ — сопряженные векторы.

Для двух плоскостей, не являющихся особыми, можно говорить об угле между ними, считая его равным углу между их бесконечно удаленными прямыми. Если этот угол равен нулю, то обыкновенные плоскости называются *псевдопараллельными*. Параллельные неособые плоскости, очевидно, будут также и псевдопараллельными.

Репером биаффинных движений, т. е. преобразований фундаментальной группы B_4, является фигура, состоящая из точки (начало координат) и четырех векторов $\underset{1}{a^i}$, $\underset{2}{a^i}$, $\underset{3}{a^i}$, $\underset{4}{a^i}$, выбранных так, что $\underset{1}{a^i}$ и $\underset{3}{a^i}$ не принадлежат одной особой плоскости, а $\underset{2}{a^i}$ и $\underset{3}{a^i}$ соответственно им сопряжены.

Будем называть *каноническими* координаты точки B_4 по отношению к биаффинному реперу и обозначать их через x^i, $i = 1, 2, 3, 4$. Движение сводится к такому точечному отображению B_4 на себя, при котором соответственные точки имеют одинаковые координаты относительно двух различных реперов. Кроме простых параллельных переносов, движениями будут также биаффинные вращения, т. е. такие преобразования, при которых начало координат остается неизменным.

Вращение определяется неособенной матрицей вида

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Матрица канонических координат тензора G_l^j имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{5}$$

Группа движений B_4 зависит от 12 параметров.

Будем называть *соответствием* (AB) такое соответствие между точками B_4 и точками комплексной аффинной плоскости A_2, при котором

$$X = x^1 + ix^2, \quad Y = x^3 + ix^4, \tag{6}$$

где x^i — канонические координаты точки B_4; X и Y — декартовы координаты соответствующей точки A_2.

При отображении (AB) особая плоскость (3) B_4 переходит в прямую A_2, выражающуюся уравнением

$$R = B + (\lambda + i\mu) A, \tag{7}$$

где R — радиус-вектор текущей точки; B и A соответствуют векторам b^i и a^i, а внутренняя геометрия плоскости совпадает с евклидовой геометрией плоскости комплексного переменного $\lambda + i\mu$.

Параллельным особым плоскостям B_4 соответствуют параллельные прямые A_2. При отображении (AB) параллельный перенос в B_4 соответствует параллельному переносу в A_2, а биаффинному вращению, определяемому матрицей (4), — однородное аффинное преобразование, выражаемое матрицей

$$\left\| \begin{matrix} a+ib & c+id \\ e+if & g+ih \end{matrix} \right\|. \tag{8}$$

Таким образом: *группа биаффинных движений B_4 изоморфна группе аффинных преобразований комплексной плоскости.*

В произвольных криволинейных координатах биаффинная метрика определяется заданием тензора G_i^j абсолютной инволюции, удовлетворяющего условиям (1), причем ковариантная производная этого тензора равна нулю.

Будем называть биконформным такое дифференцируемое отображение B_4 на себя, которое сохраняет тензор G_i^j. Если это отображение выражается уравнением

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

то для его биконформности необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$\frac{\partial y^q}{\partial x^i} G_q^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^p} G_i^p. \tag{9}$$

Если x^i и y^i — канонические координаты, то эти соотношения принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{\partial y^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial y^1}{\partial x^2} = -\frac{\partial y^2}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial y^4}{\partial x^2} = \frac{\partial y^3}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial y^3}{\partial x^2} = -\frac{\partial y^4}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^4} = \frac{\partial y^1}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial y^1}{\partial x^4} = -\frac{\partial y^2}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial y^4}{\partial x^4} = \frac{\partial y^3}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial y^3}{\partial x^4} = -\frac{\partial y^4}{\partial x^3}. \end{gathered} \tag{10}$$

Но условия (10) необходимы и достаточны для того, чтобы функции

$$\begin{aligned} y^1 + iy^2 &= \varphi(x^1 + ix^2, \ x^3 + ix^4), \\ y^3 + iy^4 &= \psi(x^1 + ix^2, \ x^3 + ix^4) \end{aligned} \tag{11}$$

были аналитическими [2].

Итак, *для того чтобы отображение B_4 на себя было биконформным, необходимо и достаточно, чтобы в соответствии (AB) ему отвечало такое отображение A_2 на себя, при котором декартовы координаты преобразованных точек выражаются через декартовы координаты данных точек по формулам* (11) *как аналитические функции двух комплексных переменных.*

Физико-технический институт
Казанского филиала
Академии наук СССР

Поступило
17 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Норден, Матем. сборн., 24 (66): 3 (1949). [2] Б. А. Фукс. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. М., 1948, стр. 15.