

МАТЕМАТИКА

И. Ф. ЛОХИН

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИИ ВИДА $\{F(\lambda_n z)\}$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 IX 1951)

Карлеман в 1923 г. доказал следующую теорему.

Пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (1)$$

возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию:

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\lambda_j < R} \frac{1}{\lambda_j}}{\log R} = \alpha, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

Тогда всякая функция, регулярная в области g , лежащей внутри полосы

$$|\operatorname{Im}(z)| < \alpha\pi, \quad (3)$$

может быть представлена в любой ограниченной замкнутой области $g_1 \subset g$ как предел равномерно сходящейся в g_1 последовательности полиномов R_n вида:

$$R_n = \sum_{j=1}^n a_{nj} e^{\lambda_j z}. \quad (4)$$

Или, иначе говоря, система функций $\{e^{\lambda_n z}\}$ будет полна внутри полосы (3).

В настоящей статье устанавливается более общая теорема, а именно:

Пусть $F(z)$ — целая функция первого порядка нормального типа, ассоциированная функция которой имеет все свои особые точки на отрезке $(-1, 1)$ действительной оси, $F^{(k)}(0) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ удовлетворяют условиям теоремы Карлемана.

Тогда система функций $\{F(\lambda_n, z)\}$ будет полна внутри полосы (3).

Из этой теоремы, как частный случай, получается теорема Карлемана, если положить $F(z) = e^z$, и некоторые другие теоремы.

§ 1. В этом параграфе докажем одну теорему единственности для целых функций первого порядка нормального типа.

Теорема 1. Пусть числа λ_n удовлетворяют условиям теоремы Карлемана и $F(z)$ — целая функция первого порядка нормального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$:

$$h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) < \alpha'\pi, \quad \alpha' < \alpha; \quad h(\varphi) < \infty \text{ для } \varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Тогда, если

$$F(\lambda_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

то

$$F(z) \equiv 0.$$

Доказательство. Допустим, что $F(z) \not\equiv 0$. Тогда, полагая $\log |F(re^{i\varphi})| = u(r, \varphi)$, будем иметь ⁽²⁾:

$$\begin{aligned} \sum_{l < \lambda_v < R} \left(\frac{1}{\lambda_v} - \frac{\lambda_v}{R^2} \right) &= \frac{1}{\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u(R, \varphi) \cos \varphi d\varphi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_l^R \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \left[u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) + u\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) \right] dr + O(1). \end{aligned} \quad (7)$$

Из условий (5) и (7) следует:

$$(1) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{l < \lambda_v < R} \left(\frac{2}{\lambda_v} - \frac{\lambda_v}{R^2} \right)}{\log R} \leq \alpha'. \quad (8)$$

Пусть далее β — произвольное число, заключенное между нулем и единицей. Тогда сумму $\sum_{l < \lambda_v < R} \left(\frac{1}{\lambda_v} - \frac{\lambda_v}{R^2} \right)$ представим следующим образом:

$$\sum_{l < \lambda_v < R} \left(\frac{1}{\lambda_v} - \frac{\lambda_v}{R^2} \right) = \sum_{l < \lambda_v < \beta R} \left(\frac{1}{\lambda_v} - \frac{\lambda_v}{R^2} \right) + \sum_{\beta R < \lambda_v < R} \left(\frac{1}{\lambda_v} - \frac{\lambda_v}{R^2} \right). \quad (9)$$

Из (9) легко получаем оценку:

$$\sum_{l < \lambda_v < \beta R} \frac{1}{\lambda_v} \leq \frac{1}{1 - \beta^2} \sum_{l < \lambda_v < R} \left(\frac{1}{\lambda_v} - \frac{\lambda_v}{R^2} \right). \quad (10)$$

Деля (10) на $\log \beta R$ и полагая R стремящимся к бесконечности, будем иметь:

$$\alpha \leq \frac{1}{1 - \beta^2} \alpha'. \quad (11)$$

Но так как β — произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $0 < \beta < 1$, то из (11) следует:

$$\alpha \leq \alpha'. \quad (12)$$

Соотношение (12) противоречит условию теоремы. Это противоречие и доказывает справедливость теоремы.

Для дальнейшего докажем еще лемму.

Лемма. Пусть $F(z)$ целая функция первого порядка нормального типа, ассоциированная функция которой имеет все свои особые точки на отрезке $(-1, 1)$ действительной оси. Тогда функция

$$\Phi(\lambda) = \int_C g(s) F(\lambda z) ds, \quad (13)$$

где C — замкнутый контур, лежащий внутри полосы $|\operatorname{Im}(z)| < \alpha'\pi$, $g(s)$ — функция с интегрируемым квадратом на C , s — длина кривой C ,

будет целой в плоскости λ и ее индикатриса будет удовлетворять условию

$$h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) < \alpha' \pi; \quad h(\varphi) < \infty \quad \text{для } \varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

Доказательство. Положим

$$F_1(\lambda) = F(\lambda z) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n!} \lambda^n z^n.$$

Тогда функция, ассоциированная по Борелю с $F_1(\lambda)$, будет иметь вид:

$$f_1(\lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{a_n z^n}{\lambda^{n+1}} = \frac{1}{z} \sum_0^{\infty} \frac{a^n}{\left(\frac{\lambda}{z}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z} f\left(\frac{\lambda}{z}\right), \quad (15)$$

где $f(\zeta)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $F(\zeta)$. Из (15) следует, что особые точки $f_1(\lambda)$ будут точки вида $\lambda = \xi z$, где ξ — произвольная особая точка функции $f(\zeta)$, лежащая по условию теоремы на отрезке $(-1, 1)$. Следовательно, при любом z из ограниченной замкнутой области $\bar{g}$, лежащей внутри полосы $|\operatorname{Im}(z)| < \alpha' \pi$, особые точки $f_1(\lambda)$ будут находиться также в ограниченной замкнутой области, лежащей внутри $|\operatorname{Im}(z)| < \alpha' \pi$.

Поэтому индикатриса роста $h_1(\varphi)$ целой функции $F_1(\lambda)$ при указанных выше z будет удовлетворять условиям вида

$$h_1\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) < \alpha' \pi; \quad h_1(\varphi) < \infty \quad \text{для } \varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}. \quad (16)$$

Из этого для любого z из $\bar{g}$ следует оценка:

$$|F_1(\lambda)| = |F(\lambda z)| < A_1 e^{[h_1(\varphi) + \varepsilon] |\lambda|}, \quad (17)$$

где A_1 — постоянное, не зависящее от z ; ε — произвольно малое положительное число.

Из (13) и (17) получаем оценку:

$$|\Phi(\lambda)| < A e^{[h_1(\varphi) + \varepsilon] |\lambda|}, \quad (18)$$

где A — также постоянное, не зависящее от точки z области $\bar{g}$. Оценки (16) и (18) доказывают лемму.

Приведенные теоремы и лемма позволяют установить некоторые критерии полноты систем аналитических функций.

§ 2. Теорема 2. Если числа λ_n удовлетворяют условиям теоремы 1, а целая функция $F(z)$ — условиям леммы и $F^{(k)}(0) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то система функций $\{F(\lambda_n z)\}$ будет полна внутри полосы

$$|\operatorname{Im}(z)| < \alpha \pi. \quad (19)$$

Доказательство. Пусть D — произвольная область, лежащая внутри полосы (19), ограниченная контуром L . Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что для функции $g(s)$ с интегрируемым квадратом из условий

$$\int_L g(s) F(\lambda_n z) ds = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где s — длина кривой L от фиксированной точки до произвольной точки кривой, следует, что $g(s)$ равна нулю почти всюду. Для этого рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda) = \int_L g(s) F(\lambda z) ds. \quad (21)$$

По лемме $\Phi(\lambda)$ будет целой функцией первого порядка нормального типа и ее индикатриса будет удовлетворять условиям (14). Поэтому, если имеют место равенства (20), то по теореме 1 заключаем, что $\Phi(\lambda) \equiv 0$. Из этого следует также, что

$$\Phi^{(k)}(0) = \int_L g(s) z^k F^k(0) ds = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

откуда имеем

$$\int_L g(s) z^k ds = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Но система функций $\{z^k\}$ полна в любой области. Поэтому из (23) следует, что $g(s)$ равна нулю почти всюду. Теорема таким образом доказана.

В качестве частного случая этой теоремы получаем теорему Карлемана, если положить $F(z) = e^z$.

Также, если в теореме 2 положить $F(z) = e^z \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — целая функция первого порядка, но минимального типа, то будем иметь теорему:

Теорема. Пусть числа λ_n удовлетворяют условиям теоремы 1, $\varphi_k(z)$ — целая функция первого порядка минимального типа, причем $\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\nu} \varphi^{(\nu)}(0) \neq 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Тогда система функций $\{e^{\lambda_n z} \varphi(\lambda_n z)\}$ будет полна в полосе $|\operatorname{Im}(z)| < \alpha\pi$.

Поступило
6 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Т. Carleman, Ark. f. Math., Ast. och Fysik, **17**, 5 (1923). ² Т. Поля и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, 1937, стр. 342.