Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

В. П. ИЛЬИН

О СХОДИМОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 27 IX 1951)

Известно, что минимальная задача, к которой сводится та или иная краевая задача математической физики, в ряде важных случаев имеет решение, и это решение можно построить как предел минимизирующей последовательности, которая, вообще говоря, сходится в среднем.

Здесь мы даем условия, обеспечивающие равномерную сходимость минимизирующей последовательности, если речь идет о решении линейного самосопряженного уравнения второго порядка эллиптического типа или бигармонического уравнения.

Мы рассматриваем:

а) решение уравнения

$$Lu = -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b(x_1, \ldots, x_n)\,u = f(x_1, \ldots, x_n) \quad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{1}$$

в n-мерной ограниченной области D с границей Γ при краевых условиях одного из трех следующих типов:

$$u\big|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \cos(\nu, x_j) \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]_\Gamma = 0, \tag{3}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \cos(\nu, x_j) \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sigma u\right]_\Gamma = 0 \quad (\sigma(P) \geqslant \sigma_0 > 0), \tag{4}$$

где ν означает внешнюю нормаль к Γ;

б) решение уравнения

$$\Delta^2 u = f \tag{5}$$

при условиях:

$$u\Big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_\Gamma = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Мы предполагаем, что $a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы в $\overline{D} = D + \Gamma$, $b(x_1, \ldots, x_n)$ неотрицательна, ограничена и измерима в D, а $f(x_1, \ldots, x_n)$ в D квадратично-суммируема. Кроме того, мы считаем, что в любой точке P области $\overline{D}$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}(P)\,\xi_i\xi_j \geqslant \mu \sum_{i=i}^{n} \xi_i^2,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — произвольные вещественные числа, а μ — положительная постоянная.

В случае, если уравнение (1) решается при краевом условии (3), мы дополнительно будем предполагать, что или $b(P) \geqslant b_0 > 0$, или же $b(P) \equiv 0$ и $f(P)$ такова, что $\int\limits_D \cdots \int f\,dx_1 \ldots dx_n = 0$; во втором из этих случаев мы будем требовать также, чтобы искомое решение u удовлетворяло условию $\int\limits_D \cdots \int u\,dx_1 \ldots dx_n = 0$.

Положим:

$$F(u) = \overbrace{\int\limits_D \cdots \int}^{n} \left(\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + bu^2 - 2fu \right) dx_1 \ldots dx_n, \tag{7}$$

если речь идет о решении уравнения (1) при условиях (2) или (3);

$$F(u) = \overbrace{\int\limits_D \cdots \int}^{n} \left(\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + bu^2 - 2fu \right) dx_1 \ldots dx_n + \overbrace{\int\limits_\Gamma \cdots \int}^{n-1} \sigma u^2\, d\Gamma, \tag{8}$$

если речь идет о решении уравнения (1) при условии (4), и

$$F(u) = \overbrace{\int\limits_D \cdots \int}^{n} \left(\sum_{i,\,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \right)^2 - 2fu \right) dx_1 \ldots dx_n, \tag{9}$$

когда рассматривается решение уравнения (5) при условиях (6).

Теорема 1. *Пусть $u(x_1, \ldots, x_n)$ представляет решение уравнения (1) при краевых условиях одного из трех указанных выше типов. Предположим, что конечен интеграл (7) и ограничен интеграл*

$$\int\limits_{D_1} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr \leqslant L_0^2. \tag{10}$$

где $\mathbf{r}$ — произвольное направление, а D_1 — произвольное сечение области D прямой, параллельной направлению $\mathbf{r}$.

Пусть u_k — последовательность функций, непрерывных, имеющих непрерывные частные производные в D, удовлетворяющих тому же краевому условию, что и u (естественному условию u_k могут и не удовлетворять), и условию

$$\int\limits_{D_1} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r} \right)^2 dr \leqslant L_k^2.$$

Пусть, далее, дано, что

$$F(u_k) - F(u) = A_k^2, \quad \lim_{k \to \infty} A_k = 0;$$

$$\lim_{k \to \infty} A_k L_k^{n-2} = 0 \quad \textit{при} \ n > 2;$$

$$\lim_{k\to\infty} A_k L_k^{2\alpha} = 0 \quad \textit{при } n = 2 \textit{ и краевых условиях (3) или (4)}$$

здесь α *— некоторое сколь угодно малое положительное число*):

$$\lim_{k\to\infty} A_k \ln L_k = 0 \textit{ при } n = 2 \textit{ и краевом условии (2).}$$

Тогда имеет место равномерная сходимость последовательности $u_k(x_1, \ldots, x_n)$ *к* $u(x_1, \ldots, x_n)$ *в* $\overline{D}$, *причем*

$$|u - u_k| \leqslant C_1 \left[A_k (L_0^2 + L_k^2)^{\frac{n-2}{2}}\right]^{\frac{1}{n-1}} \quad \textit{при } n > 2;$$

$$|u - u_k| \leqslant C_2 [A_k (L_0^2 + L_k^2)]^{\frac{1}{1+2\alpha}} + C_3 A_k \textit{ при } n = 2 \textit{ и краевых условиях (3) или (4);}$$

$$|u - u_k| \leqslant C_4 A_k \sqrt{\ln \frac{d\,(L_0^2 + L_k^2)}{A_k^2}} + C_5 A_k \textit{ при } n = 2 \textit{ и краевом условии (2)}$$

где C_i *— постоянные, зависящие только от коэффициентов уравнения и вида области, а* d *— диаметр области* D.

При этом мы предполагаем, что область D *имеет кусочно-гладкую границу.*

Быстрота возрастания L_k может быть оценена, если природа u_k известна. Приведем теорему для случая, когда u_k есть полином относительно каждой переменной.

Теорема 2. *Относительно* u *делаем те же предположения, что и в теореме 1, а относительно* u_k *предполагаем, что она удовлетворяет тому же краевому условию, что и* u (*кроме, может быть, естественного*), *и имеет вид*:

$$u_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j_1+\ldots+j_n=0}^{k} a_{j_1\ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}.$$

Тогда, если

$$\lim A_k k^{n-2} (\ln k)^{\frac{n-2}{2}} = 0 \textit{ при } n > 2,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} A_k k^{2\alpha} (\ln k)^{\alpha} = 0$$

$$\textit{при } n = 2 \textit{ и краевых условиях (3) или (4);}$$

$$\lim_{k\to\infty} A_k \ln k = 0 \textit{ при } n = 2 \textit{ и краевом условии (2);}$$

то $u_k(x_1, \ldots, x_n)$ *сходится равномерно к* $u(x_1, \ldots, x_n)$ *в области* $\overline{D}$ *и*

$$|u - u_k| \leqslant C_1' \left[A_k k^{n-2} (\ln k)^{\frac{n-2}{2}}\right]^{\frac{1}{n-1}} \quad \textit{при } n > 2;$$

$$|u - u_k| \leqslant C_2' \left[A_k k^{2\alpha} (\ln k)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{1+2\alpha}} \textit{ при } n = 2 \textit{ и краевых условиях (3) или (4);}$$

$$|u - u_k| \leqslant C_3' A_k \sqrt{\ln \frac{k}{A_k}} \textit{ при } n = 2 \textit{ и краевом условии (2).}$$

Отметим, что условие (10), наложенное на функцию u, не является существенным.

Если речь идет о решении уравнения (5) при условиях (6), то нетрудно указать также условия для равномерной сходимости первых производных, именно, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Предположим, что для решения уравнения* (5) *при условиях* (6) *мы имеем* $F(u) \leqslant +\infty$ (⁹) *и*

$$\int\limits_{D_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial r} \right)^2 dr \leqslant \overline{L}_0^2; \qquad \int\limits_{D_1} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr \leqslant \overline{L}_0^2$$

(*второе неравенство при* $n \geqslant 4$), *где* r *и* D_1 *имеют тот же смысл, что и выше.*

Пусть $u_k(x_1, \ldots, x_n)$ — *последовательность дважды непрерывно дифференцируемых в* D *функций, удовлетворяющих условиям* (6) *и таких, что*

$$\int\limits_{D_1} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial r} \right)^2 dr \leqslant \overline{L}_k^2, \quad \int\limits_{D_1} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr \leqslant \overline{L}_0^2, \quad (n \geqslant 4);$$

$$F(u_k) - F(u) = \overline{A}_k^2, \qquad \lim_{k \to \infty} \overline{A}_k = 0;$$

$$\lim_{k \to \infty} \overline{A}_k \, \overline{L}_0^{n-2} = 0 \qquad \text{при } n > 2;$$

$$\lim_{k \to \infty} \overline{A}_k \ln \overline{L}_k = 0 \qquad \text{при } n = 2.$$

Тогда u_k, $\partial u_k / \partial x_i$ *сходятся равномерно, соответственно, к* u, $\partial u / \partial x_i$ *и имеют место неравенства:*

$$|u - u_k| \leqslant C_6 \left[\overline{A}_k^3 \left(\overline{L}_0^2 + \overline{L}_k^2 \right)^{\frac{n-4}{2}} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{при } n > 4;$$

$$|u - u_k| \leqslant C_7 \overline{A}_k \sqrt{\ln \frac{d^3 (\overline{L}_0^2 + \overline{L}_k^2)}{\overline{A}_k^2}} + C_8 \overline{A}_k \quad \text{при } n = 4;$$

$$|u - u_k| \leqslant C_9 \overline{A}_k \quad \text{при } n = 2, 3;$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right| \leqslant C_{10} \left[\overline{A}_k (\overline{L}_0^2 + \overline{L}_k^2)^{\frac{n-2}{2}} \right]^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{при } n > 2;$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right| \leqslant C_{11} \overline{A}_k \sqrt{\ln \frac{d\,(\overline{L}_0^2 + \overline{L}_k^2)}{\overline{A}_k^2}} + C_{12} \overline{A}_k \quad \text{при } n = 2.$$

Относительно области D *мы делаем те же предположения, что и выше.*

Замечание 1. Теореме 2 имеет место и в том случае, если в качестве u_k взять тригонометрические полиномы или функции вида

$$u_k(x_1, \ldots, x_n) = \omega(x_1, \ldots, x_n) \sum_{j_1 + \ldots + j_n = 0}^{k} a_{j_1 \ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}, \tag{11}$$

где $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, удовлетворяющая определенным условиям.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
24 VIII 1951