Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

Л. Л. ВЕРБИЦКИЙ

ТЕНЗОРНЫЙ ПРИЗНАК КОНФОРМНО-ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ КЛАССА 1

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 IX 1951)

В настоящей заметке даны в тензорной форме необходимые и достаточные условия того, чтобы риманово пространство V_n с определенной основной метрической формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{1}$$

при $n \geqslant 4$ было конформно-евклидовым класса 1, т. е. чтобы форму (1) преобразованием координат $x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ можно было привести к виду

$$ds^2 = \lambda^2 (y^1, y^2, \ldots, y^n) [(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + \ldots + (dy^n)^2]$$

и чтобы V_n можно было вместить в евклидово пространство E_{n+1}.

Изучением конформно-евклидовых пространств класса 1 занимались А. М. Лопшиц [1] и Н. А. Розенсон [2,3]. Они доказали, что поверхность V_n в евклидовом пространстве E_{n+1}, допускающая конформное отображение на E_n $(n \geqslant 4)$, характеризуется тем, что все главные кривизны V_n, кроме, может быть, одной, равны друг другу.

Теорема 1. *Для того чтобы пространство V_n в E_{n+1} при $n \geqslant 4$ допускало конформное отображение на E_n, необходимо и достаточно, чтобы второй основной тензор V_n имел вид*

$$\pi_{ij} = \sigma g_{ij} + (\tilde{\sigma} - \sigma) e_i e_j, \tag{2}$$

где σ и $\tilde{\sigma}$ — скаляры и e_i — компоненты единичного вектора на V_n. При этом $\tilde{\sigma}$ есть простая и σ — $(n-1)$-кратная главная кривизна V_n в E_{n+1}; вектор $e^i = g^{i\alpha} e_\alpha$ определяет главное направление V_n, соответствующее главной кривизне $\tilde{\sigma}$.

Теорема 2. *Конформно-евклидово пространство V_n класса 1 при $n \geqslant 4$ характеризуется тем, что его тензор кривизны имеет строение*

$$R_{ij,\,kl} = \sigma^2 (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) + \sigma (\tilde{\sigma} - \sigma)(g_{ik} e_j e_l + g_{jl} e_i e_k - g_{il} e_j e_k - g_{jk} e_i e_l), \tag{3}$$

причем

$$\sigma_j \equiv \frac{\partial\sigma}{\partial x_j} = \sqrt{\Delta\sigma}\, e_j, \quad \Delta\sigma \equiv g^{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta. \tag{4}$$

Заметим, что скаляры σ и $\tilde{\sigma}$ и вектор e_i (если они существуют) легко определяются по данной метрической форме (1). Если положить $A=\sigma^2(2-n)-\tilde{\sigma}\sigma$, $B=(2-n)(\tilde{\sigma}\sigma-\sigma^2)$, то из (3) следуют соотношения: $R=nA+B$, $\rho=R^2+(n-1)B^2$, где $R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$, $\rho=R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ (R_{ij} — тензор Риччи формы (1)). Компоненты вектора e_i пропорциональны элементам строк матрицы $\|R_{ij}-Ag_{ij}\|$, ранг которой равен 1; при $\sigma\neq C$ вектор e_i находится также из (4).

Теорема 3. *Линии кривизны конформно-евклидова пространства V_n в E_{n+1}, соответствующие главной кривизне $\tilde{\sigma}$, ортогональны (при $\tilde{\sigma}-\sigma\neq 0$) семейству поверхностей V_{n-1} на V_n; на каждой из этих V_{n-1} скаляр σ сохраняет постоянное значение.*

Теорема 4. *Поверхности V_{n-1}, указанные в условии теоремы 3, суть пространства постоянной римановой кривизны.*

Эквивалентная теорема была другим путем доказана А. М. Лопшицом в работе [1].

Доказательства теорем 1—4. Пусть $\underset{(\lambda)}{e_i}$ — единичные векторы главных направлений гиперповерхности V_n в E_{n+1}. Тогда основные тензоры V_n равны [4]

$$g_{ij}=\sum_{\lambda=1}^{n}\underset{(\lambda)}{e_i}\underset{(\lambda)}{e_j},\quad \pi_{ij}=\sum_{\lambda=1}^{n}\underset{(\lambda)}{\sigma}\underset{(\lambda)}{e_i}\underset{(\lambda)}{e_j},\tag{5}$$

где $\underset{(\lambda)}{\sigma}$ ($\lambda=1, 2, \ldots, n$) — главные кривизны V_n. Если V_n конформно-евклидово, то все главные кривизны, кроме, может быть, одной, равны друг другу. Полагая в (5) $\underset{(\lambda)}{\sigma}=\sigma$ ($\lambda=1, 2, \ldots, n-1$); $\underset{(n)}{\sigma}=\tilde{\sigma}$; $\underset{(n)}{e_i}=e_i$ и вычитая из второй формулы (5) первую, умноженную на σ, получим (2). Обратно, если второй основной тензор π_{ij} гиперповерхности V_n в E_{n+1} выражается формулой (2), то V_n, для которой σ будет $(n-1)$-кратной главной кривизной, допускает конформное отображение на E_n. Теорема 1 доказана.

Вследствие (2) и уравнений Гаусса

$$R_{ij,\,kl}=\pi_{ik}\pi_{jl}-\pi_{jk}\pi_{il}\tag{6}$$

тензор кривизны конформно-евклидова пространства класса 1 имеет вид (3).

Дифференцируя (2) ковариантно по x^k и применяя к тензору π_{ij} уравнения Петерсона — Майнарди

$$\pi_{ij\,|\,k}-\pi_{ik\,|\,j}=0,\tag{7}$$

получим

$$\sigma_k g_{ij}-\sigma_j g_{ik}+(\tilde{\sigma}_k-\sigma_k)e_ie_j-(\tilde{\sigma}_j-\sigma_j)e_ie_k+$$
$$+(\tilde{\sigma}-\sigma)(e_{i\,|\,k}e_j-e_{i\,|\,j}e_k)+(\tilde{\sigma}-\sigma)e_i(e_{j\,|\,k}-e_{k\,|\,j})=0.\tag{8}$$

Умножая это равенство на $e^i\,(=g^{i\alpha}e_\alpha)$ и суммируя по i, получим

$$(\tilde{\sigma}-\sigma)(e_{j\,|\,k}-e_{k\,|\,j})=\tilde{\sigma}_j e_k-\tilde{\sigma}_k e_j.\tag{9}$$

Из (9) при $\tilde{\sigma}-\sigma\neq 0$ следует

$$e_i(e_{j\,|\,k}-e_{k\,|\,j})+e_j(e_{k\,|\,i}-e_{i\,|\,k})+e_k(e_{i\,|\,j}-e_{j\,|\,i})=0.\tag{10}$$

Равенство (10) выражает, что поле вектора e_i допускает поверхности V_{n-1}, ортогональные к векторам поля.

С помощью (9) получаем из (8)

$$(\tilde{\sigma}-\sigma)\,(e_{l\,|\,k}\,e_j-e_{l\,|\,j}\,e_k)+\sigma_k\,(g_{lj}-e_l\,e_j)-\sigma_j\,(g_{lk}-e_l\,e_k)=0.$$

Поднимая здесь значок i и свертывая по значкам i, k, получим

$$[(\tilde{\sigma}-\sigma)\,e^{\alpha}_{.\,|\,\alpha}-(\sigma_\alpha\,e^\alpha)]\,e_j=(n-2)\,\sigma_j. \tag{11}$$

Умножая (11) на e^j и суммируя по j, находим

$$(\tilde{\sigma}-\sigma)\,e^{\alpha}_{.\,|\,\alpha}=(n-1)\,\sigma_\alpha\,e^\alpha. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует

$$\sigma_j=(\sigma_\alpha\,e^\alpha)\,e_j. \tag{13}$$

Это равенство эквивалентно (4). Из (13) и (10) вытекает теорема 3.

Если предположить, что для данного риманова пространства V_n $(n\geqslant 4)$ имеет место (3) и (4), то, вычисляя с помощью (3) тензор конформной кривизны $C_{ij,\,kl}$ пространства V_n, получим $C_{ij,\,kl}\equiv 0$. Определяя далее тензор π_{ij} формулой (2) и учитывая, что из равенства $C_{ij,\,kl}=0$, вытекает ((5), стр. 116)

$$R_{ij\,|\,k}-R_{ik\,|\,j}=\frac{1}{2\,(n-1)}\,(g_{ij}R_k-g_{ik}R_j),\quad R_j\equiv\frac{\partial R}{\partial x_j},$$

найдем, что тензор π_{ij} удовлетворяет уравнениям (6) и (7); вместе с тем пространство V_n конформно-евклидово класса 1. Теорема 2 доказана.

Для доказательства теоремы 4 построим специальную систему координат $(y^1,\,y^2,\,\ldots,\,y^n)$ на V_n так, чтобы поверхности V_{n-1}, определенные теоремой 3, имели уравнения $y^1=C$ и чтобы вдоль линий кривизны V_n, ортогональных к поверхностям $y^1=C$, координаты $(y^2,\,y^3,\,\ldots,\,y^n)$ сохраняли те же значения, какие они имеют на поверхности $y^1=y^1_0$.

В системе координат $(y^1,\,y^2,\ldots,\,y^n)$ имеем

$$g_{1l}=0,\quad g^{1l}=0\quad (i=2,\,3,\,\ldots,\,n),\quad g^{11}=\frac{1}{g_{11}}; \tag{14}$$

$$e_1=\sqrt{g_{11}},\quad e_2=e_3=\cdots=e_n=0. \tag{15}$$

Из (2) и (15) следует

$$\pi_{11}=\tilde{\sigma}g_{11},\quad \pi_{1i}=0,\quad \pi_{ij}=\sigma g_{ij}\quad (i,\,j=2,\,3,\,\ldots,\,n).$$

Вследствие теоремы 3 скаляр σ есть функция только одной координаты y^1, $\sigma=\sigma\,(y^1)$.

Развертывая уравнение (7) при $k=1$, $i,\,j=2,\,3,\,\ldots,\,n$, получим

$$\frac{1}{2g_{lj}}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^1}=\frac{\sigma'}{\tilde{\sigma}-\sigma},\ \text{где}\ \sigma'=\frac{d\sigma}{dy^1}\quad (i,\,j=2,\,3,\ldots,\,n). \tag{16}$$

Известно, что тензор кривизны $\overset{(n-1)}{R}_{ij,\,kl}$ гиперповерхности V_{n-1} $y^l=f^i\,(x^2,\,x^3,\,\ldots,\,x^n)$ в пространстве V^n равен ((5), стр. 181)

$$\overset{(n-1)}{R}_{ij,\,kl}=\Omega_{ik}\,\Omega_{jl}-\Omega_{il}\,\Omega_{jk}+\overset{(n)}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,y^\alpha_i\,y^\beta_j\,y^\gamma_k\,y^\delta_l,\quad y^\alpha_i=\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}, \tag{17}$$

где $\overset{(n)}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны V_n и Ω_{ij} — коэффициенты второй основной формы V_{n-1}

$$\Omega_{ij} = \xi_\alpha y^\alpha_{i\,|\,j} + \overset{(n)}{\Gamma}{}^\alpha_{\lambda\mu} y^\lambda_i y^\mu_j \xi_\alpha; \tag{18}$$

ξ_α суть компоненты единичной нормали к V_{n-1} в V_n; $\overset{(n)}{\Gamma}{}^\alpha_{\lambda\mu}$ — символы Христоффеля V_n, вычисленные в точках V_{n-1}.

Для координатной поверхности $y^1 = C$ имеем

$$y^1 = C, \quad y^\alpha = x^\alpha \quad (\alpha = 2, 3, \ldots, n),$$
$$\xi_\alpha = e_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Формулы (18), (14), (16) дают

$$\Omega_{ij} = \sqrt{g_{11}}\, \overset{(n)}{\Gamma}{}^1_{ij} = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^1} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\sigma' g_{ij}}{(\tilde{\sigma} - \sigma)} \quad (i, j = 2, 3, \ldots, n). \tag{20}$$

Из (17), (20), (19) получаем

$$\overset{(n-1)}{R}_{ij,\,kl} = \frac{\sigma'^2}{g_{11}(\tilde{\sigma} - \sigma)^2}(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) + \overset{(n)}{R}_{ij,\,kl} \quad (i, j, k, l = 2, 3, \ldots, n).$$

Подставляя сюда компоненты $\overset{(n)}{R}_{ij,\,kl}$ из (3) и учитывая (15), получим

$$\overset{(n-1)}{R}_{ij,\,kl} = \left(\frac{\sigma'^2}{g_{11}(\tilde{\sigma} - \sigma)^2} + \sigma^2\right)(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \quad (i, j, k, l = 2, 3, \ldots n),$$

что и доказывает теорему 4.

Днепропетровский государственный университет

Поступило
31 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Лопшиц, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 5, 17 (1941). [2] Н. А. Розенсон, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, 325 (1941). [3] Н. А. Розенсон, Тр. Ленинградск. политехн. ин-та, 3, 60 (1941). [4] И. А. Схоутен и Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, 2, М., 1948, стр. 84. [5] Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, М., 1948.