Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

Г. Я. АРЕШКИН

ОПЕРАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП СО СЧЕТНЫМ ВЕСОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 IX 1951)

В работе изучаются локально компактные топологические группы со счетным весом с помощью чисто алгебраического понятия «операторной структуры». Показывается, что каждая топологическая группа указанного класса определяется своей операторной структурой с точностью до изоморфизма. Центральное место в работе занимает аксиоматическая характеристика операторных структур локально компактных и компактных групп. Получаются также критерии изоморфности и гомоморфности групп в терминах операторных структур. В начале работы изучаются структуры локально бикомпактных регулярных пространств и приводится используемая ниже теорема о непрерывных отображениях бикомпактных T_1-пространств на бикомпакты.

1. Структуру S вместе с отмеченной в ней подструктурой S' назовем структурой локально бикомпактного T_1-пространства R, если S изоморфна структуре некоторого замкнутого базиса $\{F\}$ пространства R так, что при этом изоморфизме структуры S' и $\{P\}$, где $\{P\}$ — система всех бикомпактных множеств базиса $\{F\}$, соответствуют друг другу. При этом предполагается, что базис $\{F\}$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $\varnothing$, $R \in \{F\}$, 2) $F_1 \cup F_2 \in \{F\}$, $F_1 \cap F_2 \in \{F\}$ при F_1, $F_2 \in \{F\}$ и 3) для каждой точки $x \in R$ существует такая окрестность $U_0(x) = R - F_0$, $F_0 \in \{F\}$ и такое бикомпактное множество $P_0 \in \{P\}$, что $\overline{U}_0(x) \subseteq P_0$.

Аксиоматическая характеристика структур локально бикомпактных T_1- и T_2-пространств была найдена нами в работе (1).

Теорема 1. *Для того чтобы структура S вместе с отмеченной в ней подструктурой S' была структурой некоторого локально бикомпактного T_3-пространства R, необходимо и достаточно выполнение, помимо условий* I, II *и* IV *теоремы* 1 *работы* (1), *еще и условия* *:

III′. *Для любых двух элементов a' из S' и b из S, удовлетворяющих условию $a' \wedge b = \lambda$, существуют такие элементы a из S и b' из S', что $a' \wedge a = \lambda$, $b' \wedge b = \lambda$ и $a \vee b' = \vartheta$.*

Легко видеть, что условие III′ влечет условия III пп. 2.1 и 4.3 работы (1).

2. Структуру S назовем расширением структуры L, если L является подструктурой структуры S и если выполняются следующие условия: 1) $\lambda_S = \lambda_L$, $\vartheta_S = \vartheta_L$ и 2) каковы бы ни были $l \in L$ и $a \in S$, $l \neq \lambda$, $a \neq \lambda$,

* Пустой и максимальный элементы структуры S обозначаются, соответственно, через $\lambda = \lambda_S$ и $\vartheta = \vartheta_S$.

для которых $l \wedge a = \lambda$, найдется такой элемент l_1 из L, что $l_1 \geqslant a$, $l \wedge l_1 = \lambda$.

Теорема 2. *Для существования непрерывного отображения $y = f(x)$ бикомпактного T_1-пространства X на бикомпакт Y, необходимо и достаточно существование расширения заданной структуры L пространства Y в какую-нибудь структуру S пространства X.*

3. Структуру S назовем «операторной структурой» *, если в множестве S определена бинарная операция «·», называемая произведением, обладающая свойством ассоциативности и связанная со структурными операциями соотношениями:

I. $(a \vee b) \cdot c \geqslant (a \cdot c) \vee (b \cdot c)$, $c \cdot (a \vee b) \geqslant (c \cdot a) \vee (c \cdot b)$.

II. $a \cdot b = \lambda$ тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей a, b равен λ.

Элемент 1_S операторной структуры S, обладающий свойством $a \cdot 1_S = 1_S \cdot a = a$ для любого $a \in S$, называется единицей этой структуры. Этот элемент может и не существовать.

Вместо аксиомы I можно было бы принять аксиому I' или I'';

I'. $(a \wedge b) \cdot c \leqslant (a \cdot c) \wedge (b \cdot c)$, $c \cdot (a \wedge b) \leqslant (c \cdot a) \wedge (c \cdot b)$.

I''. Если $a_1 \leqslant a$, то для любого $b \in S$ $a_1 \cdot b \leqslant a \cdot b$, $b \cdot a_1 \leqslant b \cdot a$.

4. В дальнейшем через G обозначается локально компактная топологическая группа со счетным весом. Групповая операция в G обозначается точкой и называется произведением.

Группа G обладает замкнутым базисом $\{F\}$, удовлетворяющим, помимо условий 1—3 п. 1, еще и условиям: 4) $1 \in \{F\}$; 5) каковы бы ни были множества P_1 и P_2 из системы множеств $\{P\}$, $P_1 \cdot P_2$ и P_1^{-1} также принадлежат $\{P\}$; 6) каковы бы ни были множества $F \in \{F\}$ и P, $P' \in \{P\}$, для которых $\emptyset \subseteq P \subseteq P'$, $P \cap F = \emptyset$ и $P' \cup F = G$, найдется такое множество $F' \in \{F\}$, что $P^{-1} \cap F' = \emptyset$ и $(P')^{-1} \cup F' = G$. Кроме того, базис $\{F\}$ может быть выбран счетным. В дальнейшем под замкнутым базисом группы G понимается базис, удовлетворяющий всем условиям 1—6.

Легко видеть, что система $\{P\}$ компактных множеств базиса $\{F\}$ по отношению к операциям $\cup$, $\cap$ и группового умножения образует операторную структуру. Роль единичного элемента этой структуры играет единица группы G. В силу этого мы можем принять следующее определение.

Всякую структуру S вместе с отмеченной в ней операторной подструктурой S' назовем операторной структурой группы G, если S изоморфна структуре некоторого замкнутого базиса $\{F\}$ группы G так, что при этом изоморфизме операторные структуры S и $\{P\}$ соответствуют друг другу.

Теорема 3. *Операторная структура (S, S') группы G определяет эту группу с точностью до изоморфизма. Для изоморфности двух групп G и G^* необходимо и достаточно существование у них изоморфных операторных структур (S, S') и $(S^*, S^{*\prime})$.*

5. Теорема 4. *Для того чтобы структура S вместе с отмеченной в ней операторной подструктурой S' была операторной структурой некоторой локально компактной топологической группы G со счетным весом, необходимо и достаточно выполнение следующих трех групп аксиом.*

Первая группа аксиом

I—I. *S является дистрибутивной структурой, причем λ, $\vartheta \in S$.*

I—II. *$a' \wedge a \in S'$ при $a \in S$, $a' \in S'$.*

I—III. *Для любых двух элементов a' из S' и a из S, удовлетво-*

---

* Ср. с (2), гл. XIII.

ряющих условиям $a' \neq \lambda$, $a' \wedge a = \lambda$, *существуют такие элементы* b *из* S *и* b' *из* S', *что* $a' \wedge b = \lambda$, $b' \wedge a = \lambda$ *и* $b \vee b' = \vartheta$.

I—IV. *Если* $a, b \in S$ *и* $b < a$, *то существует* $c' \in S'$ *такой, что* $\lambda \neq c' \leqslant a$ *и* $b \wedge c' = \lambda$.

I—V. *Существует счетная подструктура* $L \subseteq S$ *такая, что для каждых двух элементов* a *из* S *и* b' *из* S', *для которых* $b' \neq \lambda$, $a \wedge b' = \lambda$, *найдется такой элемент* l *из* L, *что* $l \geqslant a$, $l \wedge b' = \lambda$.

Вторая группа аксиом

II—I. S' *содержит единицу* 1, *обладающую свойством: для любого* $a \in S$ *либо* $a \wedge 1 = 1$, *либо* $a \wedge 1 = \lambda$.

II—II. *Пусть* a, b, c, d *и* f *такие элементы из* S', *что*

$$a \cdot b \cdot c = e \neq \lambda, \quad d \wedge f = \lambda.$$

Тогда существуют отличные от λ *элементы* a_i, b_j *и* c_k *из* S', $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, p$, *такие, что*

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i = a, \quad \bigvee_{j=1}^{m} b_j = b, \quad \bigvee_{k=1}^{p} c_k = c,$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} \bigvee_{k=1}^{p} a_i \cdot b_j \cdot c_k = e,$$

причем для каждой тройки чисел i, j, k *справедливо по крайней мере одно из двух следующих соотношений*:

$$(a_i \cdot b_j \cdot c_k) \wedge d = \lambda, \quad (a_i \cdot b_j \cdot c_k) \wedge f = \lambda.$$

II—III. *Для любого элемента* a *из* S' *существует „обратный“ элемент* a^{-1} *из* S', *удовлетворяющий условиям*:

1) *если* $a \neq \lambda$, *то* $a \cdot a^{-1} \geqslant 1$; $\lambda^{-1} = \lambda$;

2) $(a^{-1})^{-1} = a$;

3) *если* $a_1 = a_2 \wedge a_3$, *то* $a_1^{-1} = a_2^{-1} \wedge a_3^{-1}$;

4) *каковы бы ни были элементы* a *из* S *и* a', b' *из* S', *для которых* $\lambda \neq a' \leqslant b'$, $a' \wedge a = \lambda$, $a \vee b' = \vartheta$, *найдется такой элемент* a^* *из* S, *что* $(a')^{-1} \wedge a^* = \lambda$, $a^* \vee (b')^{-1} = \vartheta$.

Третья группа аксиом

III—I. *Пусть* a, b *и* c^* *такие элементы, что* $a, b \in S'$, $c^* \in S$, $a \cdot b = c \neq \lambda$, $c \wedge c^* = \lambda$. *Тогда найдутся элементы* a_i, a_i^*, a_i^{**}, b_j, b_j^* *и* b_j^{**}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, *такие, что* a_i, a_i^{**}, b_j *и* $b_j^{**} \in S'$, a_i^* *и* $b_j^* \in S$ *и*

$$a_i \wedge a_i^* = \lambda, \quad a_i^* \vee a_i^{**} = \vartheta, \quad \bigvee_{i=1}^{n} a_i = a,$$

$$b_j \wedge b_j^* = \lambda, \quad b_j^* \vee b_j^{**} = \vartheta, \quad \bigvee_{j=1}^{m} b_j = b,$$

$$(a_i^{**} \cdot b_j^{**}) \wedge c^* = \lambda.$$

При этом a_i, a_i^{**}, b_j *и* b_j^{**} *отличны от* λ, *а элементы* a_i^* *и* b_j^* *могут равняться* λ *лишь в том случае, когда* $c^* = \lambda$.

6. В случае компактности группы G условия 1—6 п. 4 упрощаются. Требуется лишь, чтобы 1) $\varnothing$, G и $1 \in \{F\}$ и 2) $F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2$, $F_1 \cdot F_2$ и $F_1^{-1} \in \{F\}$ при F_1, $F_2 \in \{F\}$.

В этом случае аксиомы I—II и II—III, 4 выполняются автоматически. Аксиома I—III превращается в аксиому III п. 4.3 ([1]). Кроме того, в силу совпадения систем $\{F\}$ и $\{P\}$ соответственно упрощаются и другие аксиомы теоремы 4.

Далее, называя операторную структуру S расширением операторной структуры S^*, если S^* является операторной подструктурой S и если, кроме того, выполнены условия 1 и 2 п. 2, мы можем формулировать следующее предложение.

Теорема 5. *Для существования гомоморфного отображения $y = f(x)$ компактной группы G со счетным весом на такую же группу G^*, необходимо и достаточно существование расширения заданной операторной структуры S^* группы G^* в какую-нибудь операторную структуру S группы G.*

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук Груз.ССР

Поступило
11 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Я. Арешкин, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 213 (1949). [2] G. Birkhoff, Lattice Theory, Rev. edition, N.-Y., 1948.