Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. А. АБРАМОВ

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОЛУЧАЕМЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 17 VIII 1951)

Л. С. Понтрягин нашел ряд тензорных полей, строящихся в римановых пространствах внутренним образом, и показал, что интегралы от этих полей по циклам дают (при некоторых ограничениях) топологические инварианты ([1], [2]).

Настоящая заметка показывает, что нельзя выписать существенно новых таких полей.

1°. Рассмотрим в n-мерных римановых пространствах R_n класса дифференцируемости $1+s \geqslant 3$ такие тензорные поля $\Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$, что

$$1)\ \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = F_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}\left(g_{11}, \ldots, \frac{\partial^r g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma_1} \ldots \partial x^{\gamma_r}}, \ldots, \frac{\partial^s g_{nn}}{(\partial x^n)^s}\right),$$

где $F_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ — аналитические функции своих аргументов (определяющих чисел метрического тензора и их производных по координатам до порядка s) для их действительных значений при положительно определенной форме $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$.

2) $\Omega_{[\varkappa_1 \ldots \varkappa_p]} = \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$.

Будем говорить, что $\Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ дает топологический* инвариант, если $\int\limits_{C_p} \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p}$ (C_p — цикл в R_n) не меняется при введении в R_n другого метрического тензора.

$\Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ и $\overline{\Omega}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ назовем эквивалентными, если всегда

$$\int\limits_{C_p} \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p} = \int\limits_{C_p} \overline{\Omega}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p}.$$

Л. С. Понтрягин построил поля:

$$\Pi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{4k}} = R^{\alpha_1}_{\alpha_2, [\varkappa_1 \varkappa_2} R^{\alpha_2}_{|\alpha_3|, \varkappa_3 \varkappa_4} \ldots R^{\alpha_{2k}}_{|\alpha_1|, \varkappa_{4k-1} \varkappa_{4k}]}, \qquad (1)$$

* «Топологический» имеет, очевидно, условный смысл, речь идет о достаточно гладких изменениях метрики.

где $R^{\alpha}_{\beta,\gamma\delta}$ — тензор кривизны, и

$$\Phi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \sum c\, \Pi_{[\varkappa_1 \ldots} \cdots \Pi_{\ldots \varkappa_p]} \tag{2}$$

(c — константы).

Целью заметки является доказательство теоремы:

Теорема. *Полями (2) и нулевыми полями исчерпываются все с точностью до эквивалентных поля, дающие топологические инварианты.*

2°. Доказательство опирается на применение следующих фактов:

1. Если определяющие числа $\Psi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ тензорного поля Ψ в R_n суть функции определяющих чисел $g_{\alpha\beta}$, их производных по координатам до порядка s и определяющих чисел тензоров $a, b, \ldots$, то они суть функции определяющих чисел $g_{\alpha\beta}$, нормальных расширений $g_{\alpha\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_r}$ до порядка s и $a, b, \ldots$ Именно, $\Psi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \Psi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}\left(\ldots, g_{\alpha\beta}, \ldots, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}, \ldots\right.$

$$\left. \ldots, \frac{\partial^s g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma_1} \ldots \partial x^{\gamma_s}}, a_{\varkappa} \ldots, b_{\nu} \ldots \right) = \Psi_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}(\ldots, g_{\alpha\beta}, \ldots, 0, \ldots, g_{\alpha\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_s}, a_{\varkappa} \ldots b_{\nu} \ldots)$$

([3], стр. 106).

2. Для того чтобы тензоры в точке $g_{\alpha\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_r}$, $1 \leqslant r \leqslant s$, могли быть расширениями метрического тензора, необходимо и достаточно, чтобы

$$g_{(\alpha\beta),(\gamma_1 \ldots \gamma_r)} = g_{\alpha\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_r}, \quad g_{\alpha(\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_r)} = 0 \quad ([4]).$$

В частности, отсюда

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = 0, \quad g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = g_{\gamma\delta,\alpha\beta}.$$

3. Пусть инвариант $J = J(g^{\alpha\beta}, g_{\varkappa\lambda,\gamma_1\gamma_2}, \ldots, g_{\mu\nu,\delta_1 \ldots \delta_r}, \underset{1}{\xi}^{\varkappa_1}, \ldots, \underset{q}{\xi}^{\varkappa_q})$ — полином относительно $g_{\alpha\beta,\gamma_1\gamma_2}, \ldots, g_{\alpha\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_r}, \underset{1}{\xi}^{\varkappa_1}, \ldots, \underset{q}{\xi}^{\varkappa_q}$. Тогда J — линейная комбинация мономов, которые получаются из произведений тензоров $g^{\alpha\beta}, g_{\varkappa\lambda,\gamma_1\gamma_2}, \ldots, g_{\mu\nu,\delta_1 \ldots \delta_r}, \underset{1}{\xi}^{\varkappa_1}, \ldots, \underset{q}{\xi}^{\varkappa_q}$ полными свертываниями.

3°. Рассмотрим в R_n семейство метрических тензоров $\overset{t}{g}_{\alpha\beta} = t g_{\alpha\beta}$, $0 < t$ — параметр, постоянный на R_n. Соответствующие величины будем помечать значком ^{t} наверху. Оказывается, что независимость $\overset{t}{I} = \int\limits_{C_p} \overset{t}{\Omega}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_p}$ от t накладывает жесткие условия на строение $\Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$.

Простой проверкой доказывается лемма 1.

Лемма 1.

$$\overset{t}{g}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{t} g^{\alpha\beta}, \quad \overset{t}{g}_{\alpha\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_r} = t g_{\alpha\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_r}.$$

Разложением $F(w, z, \ldots) = \Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}(g_{\alpha\beta}, w g_{\alpha\beta,\gamma\delta}, z g_{\alpha\beta,\gamma\delta\varepsilon} \ldots) \underset{1}{\xi}^{\varkappa_1} \ldots \underset{p}{\xi}^{\varkappa_p}$ в ряд по $w, z, \ldots$ и рассмотрением коэффициентов при $w^k z^l \ldots$ доказывается лемма 2.

Лемма 2. $\Omega_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \underset{m}{\Omega}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$, *где* $\underset{m}{\Omega}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ — *однородные полиномы* *относительно* $g_{\alpha\beta,\gamma_1\gamma_2},\ldots, g_{\alpha\beta,\gamma_1\ldots\gamma_s}, g^{\alpha\beta}$, *и ряд сходится при ограниченных* $g^{\alpha\beta}$ *и достаточно малых* $|g_{\alpha\beta,\gamma_1\ldots\gamma_2}|,\ldots,|g_{\alpha\beta,\gamma_1\ldots\gamma_s}|$ *равномерно.*

Так как каждый член однороден, то $\overset{t}{\underset{m}{\Omega}}_{x_1\ldots x_p} = t^{l_m}\underset{m}{\Omega}_{x_1\ldots x_p}$.

Лемма 3. $\underset{(k)}{\Omega}_{x_1\ldots x_p} = \sum_{l_m=k}\underset{m}{\Omega}_{x_1\ldots x_p}$ — *полином относительно* $g^{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,\gamma_1\gamma_2},\ldots$

Доказательство. Покажем, что сумма конечна. Пусть в нее входит моном, в котором содержатся множителями: $g^{\alpha\beta} - h$, $g_{\alpha\beta,\gamma\delta} - h_2$, $g_{\alpha\beta,\gamma\delta\varepsilon} - h_3,\ldots$ Так как после свертывания остается p нижних индексов, то

$$4h_2 + 5h_3 + \ldots = 2h + p. \tag{3}$$

Так как $\overset{t}{\underset{(k)}{\Omega}}_{x_1\ldots x_p} = t^k\underset{(k)}{\Omega}_{x_1\ldots x_p}$, то

$$h_2 + h_3 + \ldots = h + k. \tag{4}$$

Вычтем из (3) удвоенное (4):

$$2h_2 + 3h_3 + \ldots = p - 2k. \tag{5}$$

Следовательно, в моном входит ограниченное число множителей с ограниченным числом индексов в каждом. Поэтому существует лишь конечное число таких мономов.

Лемма 4. *Если* $\Omega_{x_1\ldots x_p}$ *дает топологический инвариант, то поле* $\Omega_{x_1\ldots x_p}$ *эквивалентно* $\underset{(0)}{\Omega}_{x_1\ldots x_p}$.

Доказательство. Разобьем C_p на такие куски $Q_1,\ldots,Q_N$, что в некоторой окрестности U_{Q_i} каждого можно ввести единую систему координат $(x^1, x^2,\ldots,x^n)$.

Введем новые координаты $x^{x'} = \mu\delta^{x'}_{x}x^{x}$ и новый метрический тензор $'g_{x\lambda} = \mu^2 g_{x\lambda}$. Тогда $'g_{x'\lambda'} = \delta^{x}_{x'}\delta^{\lambda}_{\lambda'}g_{x\lambda}$, $'g_{\alpha'\beta',\gamma_1'\ldots\gamma_r'} = \frac{1}{\mu^r}\delta^{\alpha}_{\alpha'}\delta^{\beta}_{\beta'}\ldots\delta^{\gamma_r}_{\gamma_r'}g_{\alpha\beta,\gamma_1\ldots\gamma_r}$.

Возможные значения $'g^{\alpha'\beta'}$ на C_p в выбранных системах координат ограничены, поэтому если $\ldots, |'g_{\alpha'\beta',\gamma_1'\ldots\gamma_r'}|,\ldots$ достаточно малы, то $\overset{\mu^2}{\Omega}_{x_1'\ldots x_p'} = \sum_{m=1}^{\infty}\overset{\mu^2}{\underset{m}{\Omega}}_{x_1'\ldots x_p'}$.

По лемме 2, при μ достаточно большом ряд равномерно сходится на C_p. Тогда $\overset{t\mu^2}{\Omega}_{x_1'\ldots x_p'} = \sum_{m=1}^{\infty}t^{l_m}\overset{\mu^2}{\underset{m}{\Omega}}_{x_1'\ldots x_p'}$, $t \geqslant 1$. Проинтегрируем на C_p это равенство почленно:

$$\int_{C_p}\overset{t\mu^2}{\Omega}_{x_1'\ldots x_p'}dx^{x_1'}\ldots dx^{x_p'} = \sum_{m=1}^{\infty}t^{l_m}\int_{C_p}\overset{\mu^2}{\underset{m}{\Omega}}_{x_1'\ldots x_p'}dx^{x_1'}\ldots dx^{x_p'} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}t^k\int_{C_p}\overset{\mu^2}{\underset{(k)}{\Omega}}_{x_1'\ldots x_p'}dx^{x_1'}\ldots dx^{x_p'}.$$

Так как левая часть не зависит от t, то

$$\sum_{l_m\neq 0}\int_{C_p}\overset{\mu^2}{\underset{m}{\Omega}}_{x_1'\ldots x_p'}dx^{x_1'}\ldots dx^{x_p'} = 0,$$

и $\overset{\mu}{\Omega}_{x'_1 \ldots x'_p}$ эквивалентно $\Omega_{(0)x'_1 \ldots x'_p}$ для больших μ. Но так как $\int\limits_{C_p} (\overset{\mu}{\Omega}_{x'_1 \ldots x'_p} - \Omega_{(0)x'_1 \ldots x'_p}) \, dx'^1 \ldots dx'^p$ — аналитическая функция μ при $\mu > 0$, то при $\mu = 1$

$$\int\limits_{C_p} \Omega_{x'_1 \ldots x'_p} dx'^1 \ldots dx'^p = \int\limits_{C_p} \Omega_{(0)x'_1 \ldots x'_p} dx'^1 \ldots dx'^p,$$

что и требовалось доказать.

Поэтому при отыскании полей $\Omega_{x_1 \ldots x_p}$, дающих топологические инварианты, мы, кроме условий 1) и 2) из 1°, можем считать, что

3) $\Omega_{x_1 \ldots x_p}$ — полином относительно $g^{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}, \ldots, g_{\alpha\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_s}$;

4) $\overset{t}{\Omega}_{x_1 \ldots x_p} = \Omega_{x_1 \ldots x_p}$.

Лемма 5. *Полями типа* (2) *исчерпываются все тензорные поля, удовлетворяющие условиям* 2), 3), 4).

Доказательство. По предыдущему, $\Omega_{x_1 \ldots x_p}$ получается из произведений тензоров $g_{\alpha\beta,\gamma_1\gamma_2}, \ldots, g_{\mu\nu,\delta_1 \ldots \delta_s}$ свертыванием с помощью $g^{\xi\theta}$ с оставлением p нижних индексов $x_1 \ldots x_p$ и альтернированием по ним. Ввиду симметрии $g_{\alpha\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_r}$ внутри каждой группы индексов из каждого $g_{\alpha\beta,\gamma_1 \ldots \gamma_r}$ не более двух индексов можно оставить на последующее альтернирование. Следовательно (см. обозначения леммы 3), $p \leqslant 2(h_2 + h_3 + \ldots)$; используя (5), получаем $p = 2h_2$, $h_3 = \ldots = 0$, и каждый множитель имеет вид $g_{\alpha x_i, \beta x_j}$, где α и β в дальнейшем свертываются, а x_i и x_j альтернируются. Используя свойства симметрии $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ и равенство $g_{\alpha\beta,\gamma\delta} = {}^1/_3 (R_{\alpha\gamma,\beta\delta} + R_{\beta\gamma,\alpha\delta})$, получим доказательство леммы.

Лемма 6. *Поля типа* (2) *дают топологические инварианты.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть бесконечно малые изменения $g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta}$.

Как известно ([3], стр. 125), $\delta R^{\alpha}_{\beta,\gamma\lambda} = 2\nabla_{[\gamma}\Delta^{\alpha}_{\lambda]\beta}$, где $\Delta^{\alpha}_{\lambda\beta} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta}$. Тогда

$$\delta\Pi_{x_1 \ldots x_p} = \frac{p}{2} 2 (\nabla_{[x_1}\Delta^{\alpha}_{x_2|\beta|}) R^{\beta}_{|\gamma|, x_3 x_4} \ldots R^{\eta}_{|\alpha|, x_{p-1} x_p]} =$$

$$= p\nabla_{[x_1} (\Delta^{\alpha}_{x_2|\beta|} \ldots R^{\eta}_{|\alpha|, x_{p-1} x_p]}).$$

(последнее в силу тождества Бианки) и $\delta(\Pi_{[x_1 \ldots x_q}\Pi \ldots \Pi_{\ldots x_p]}) = q\nabla_{[x_1}(\Delta^{\alpha}_{x_2|\beta|} \ldots) + \ldots$

Поэтому поле $\delta\Phi_{x_1 \ldots x_p}$ (Φ — вида (2)) является производным полем и $\delta \int\limits_{C_p} \Phi_{x_1 \ldots x_p} dx^{x_1} \ldots dx^{x_p} = \int\limits_{C_p} \delta\Phi_{x_1 \ldots x_p} dx^{x_1} \ldots dx^{x_p} = 0$.

4°. Сформулированная в 1° теорема следует из лемм 5 и 6.

В [2] показано, что различные поля типа (2) неэквивалентны.

Автор благодарит И. М. Гельфанда, под руководством которого написана эта работа.

Поступило
3 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, ДАН, 43, № 3 (1944). [2] Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., 13 (1949). [3] И. Схоутен и Д. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, I, М. — Л., 1939. [4] T. Y. Thomas, The Differential Invariants of Generalized Spaces, Cambr. Univ. Press, 1934.