

П. И. КУЗНЕЦОВ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ ПОСТОЯННОГО
ТОКА ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ВКЛЮЧЕНИИ ЦЕПЕЙ ЯКОРЯ
И ОБМОТКИ ВОЗБУЖДЕНИЯ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 14 VIII 1951)

В. С. Кулебакин предложил исследовать переходные электрические и механические процессы в шунтовом электродвигателе постоянного тока при одновременном включении цепей якоря и возбуждения на постоянное напряжение (рис. 1). Эта задача до настоящего времени не была решена аналитически. Между тем, ее решение представляет интерес, особенно для теории автоматизированного электропровода (1).

1. В процессе пуска электродвигателя можно различать два режима: первый от $t = 0$ до $t = t_0$, когда якорь находится еще в неподвижном состоянии вследствие того, что момент, развиваемый электродвигателем, меньше момента сопротивления на валу электродвигателя; второй, начиная от $t = t_0$, когда момент, развиваемый электродвигателем, больше момента сопротивления и происходит нарастание угловой скорости в пределах от значения $\omega = 0$ до ее установившегося значения $\omega = \omega_{st}$.

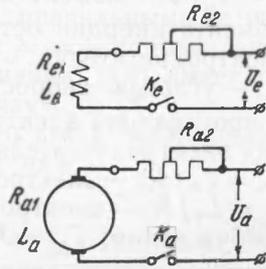


Рис. 1

При решении указанной задачи принимаются следующие допущения: 1) пренебрегается явлениями насыщения и гистерезиса магнитопровода, а также реакцией якоря; 2) не учитываются вихревые токи магнитопровода; 3) падение напряжения в щетках принимается равным нулю $\Delta U_{щ} \approx 0$; 4) цепи якоря и обмотки возбуждения питаются постоянным напряжением $U_e = U_a = U = \text{const}$; 5) момент сопротивления на валу электродвигателя считается постоянным для каждого режима: для первого режима он равен M_{s0} , а для второго M_s .

При этих условиях первый режим пуска электродвигателя описывается дифференциальными уравнениями

$$R_e I_e(t) + L_e \frac{dI_e(t)}{dt} = U, \quad (1,1)$$

$$R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt} = U \quad (1,2)$$

с начальными условиями $I_e(0) = 0$ и $I_a(0) = 0$. Время трогания якоря t_0 определяется из условия

$$c_M I_a(t_0) I_e(t_0) - M_{s0} = 0. \quad (1,3)$$

Второй режим пуска электродвигателя описывается системой дифференциальных уравнений

$$R_e I_e(t) + L_e \frac{dI_e(t)}{dt} = U, \quad (1,4)$$

$$R_a I_a(t) + L_a \frac{dI_a(t)}{dt} + c_E I_e(t) \omega(t) = U, \quad (1,5)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = c_M I_e(t) I_a(t) - M_s, \quad (1,6)$$

с начальными условиями $I_e(t_0) = I_e^0$, $I_a(t) = I_a^0$ и $\omega(t_0) = \omega_0 = 0$. Здесь U — напряжение сети; $I_a(t)$ — ток в цепи якоря; $I_a^{hz} = U/R_a$ — ток короткого замыкания; $I_a^{st} = M_s R_e / c_M U$ — ток в цепи якоря при установившемся режиме; $I_e(t)$ — ток в цепи обмотки возбуждения; $I_e^{st} = U/R_e$ — ток в цепи обмотки возбуждения при установившемся режиме; $R_a = R_{a1} + R_{a2}$ — полное сопротивление цепи якоря, где R_{a1} — сопротивление якоря, а R_{a2} — добавочное сопротивление в цепи якоря; $R_e = R_{e1} + R_{e2}$ — полное сопротивление цепи обмотки возбуждения, где R_{e1} — сопротивление обмотки возбуждения, а R_{e2} — добавочное сопротивление цепи обмотки возбуждения; L_a — индуктивность цепи обмотки якоря; L_e — индуктивность цепи обмотки возбуждения; c_E — постоянная электродвигателя, $c_E = e_{st} / I_e^{st} \omega_{st}$, где e_{st} — противоэлектродвижущая сила при $\omega = \omega_{st}$; c_M — постоянная электродвигателя, $c_M = M_e^{st} / I_e^{st} \omega_{st}$, где M_e^{st} — момент, развиваемый электродвигателем при $\omega = \omega_{st}$; J — момент инерции электродвигателя с учетом приведенного момента инерции остальных подвижных частей, соединенных с валом электродвигателя; $\omega(t)$ — угловая скорость якоря электродвигателя; ω_{st} — угловая скорость при установившемся режиме; M_{s0} — момент сопротивления электродвигателя при $\omega = 0$; M_s — момент сопротивления электродвигателя при $\omega > 0$; t — время; t_0 — время трогания якоря; $T_a = L_a / R_a$ — электромагнитная постоянная времени цепи якоря; $T_e = L_e / R_e$ — электромагнитная постоянная времени цепи обмотки возбуждения; $T_M = J R_a R_e / c_E c_M U^2$ — электромеханическая постоянная времени электродвигателя.

2. Для первого режима пуска электродвигателя ($0 \leq t \leq t_0$), согласно (1,1) и (1,2), при начальных условиях $I_e(0) = 0$ и $I_a(0) = 0$ нарастание токов происходит по законам

$$I_e(t) = I_e^{st} [1 - \exp(-t/T_e)], \quad (2,1)$$

$$I_a(t) = I_a^{hz} [1 - \exp(-t/T_a)]. \quad (2,2)$$

Время трогания якоря электродвигателя t_0 определяется из условий (1,3) заменой $I_e(t)$ и $I_a(t)$ выражениями (2,1) и (2,2) при $t = t_0$.

3. Для второго режима пуска электродвигателя ($t_0 \leq t < \infty$) решением дифференциального уравнения (1,4) при начальном значении I_e^0 в безразмерной переменной $\tau = (t - t_0) / T_e$ будет

$$I_e(\tau) = I_e^{st} (1 - p e^{-\tau}) \quad (0 < \tau < \infty), \quad (3,1)$$

где $p = \exp(-t_0/T_e)$. Перейдя к переменной τ в дифференциальных уравнениях (1,5) и (1,6) и подставив в них $I_e(\tau)$ из формулы (3,1), получим:

$$\frac{L_a}{T_e} \frac{dI_a(\tau)}{d\tau} + c_E I_e^{st} (1 - p e^{-\tau}) \omega(\tau) + R_a I_a(\tau) = U, \quad (3,2)$$

$$\frac{J}{T_e} \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} = c_M I_e^{st} (1 - p e^{-\tau}) I_a(\tau) - M_s. \quad (3,3)$$

Таким образом, для второго режима пуска электродвигателя ($t_0 \leq t < \infty$) система нелинейных дифференциальных уравнений (1,5)

и (1,6) при помощи решения (3,1) приведена к системе линейных дифференциальных уравнений (3,2) и (3,3) с переменными коэффициентами и начальными условиями I_a^0 и $\omega_0 = 0$.

4. Введем следующие обозначения: $v = I_a$, $w = \omega$, $z = 1 - p \exp(-\tau)$, $p_{10} = UT_e/L_a$, $p_{11} = T_e/T_a$, $p_{12} = c_E UT_e/R_e L_a$, $p_{20} = M_s T_e/J$, $p_{21} = c_M UT_e/R_e J$, $p_{22} = 0$.

Тогда уравнения (3,2) и (3,3) примут вид:

$$(1-z) \frac{dv}{dz} = p_{10} - p_{11} v - p_{12} zw \quad (1-p < z < 1), \quad (4,1)$$

$$(1-z) \frac{dw}{dz} = -p_{20} + p_{21} zv \quad (1-p < z < 1), \quad (4,2)$$

а начальные условия при $z = 1 - p$ будут $v = [1 - \exp(-t_0/T_a)] U/R_a$, $w = 0$. Исключив из уравнений (4,1) и (4,2) функцию v , найдем:

$$z(1-z)^2 \frac{d^2 w}{dz^2} - [az^2 - (1+a)z + 1] \frac{dw}{dz} + bz^3 w = a_0 z^2 - a_1 z + a_2, \quad (4,3)$$

где $a = p_{11} = T_e/T_a$, $b = p_{12} p_{21} = c_E c_M U^2 T_e^2 / JL_a R_e^2 = T_e^2 / T_a T_M$, $a_0 = p_{10} p_{21} = c_M U^2 T_e^2 / JL_a R_e$, $a_1 = p_{20} (1 + p_{11}) = (1 + T_e/T_a) M_s T_e / J$, $a_2 = p_{20} = M_s T_e / J$. Начальные условия при $z = 1 - p$ для w будут $w = 0$ и $dw/dz = 0$. Левая часть уравнения (4,3) имеет три особых точки: $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$. Точки $z = 0$ и $z = 1$ будут правильными с разностью их показателей, не равной $1/2$. Точка $z = \infty$ -- неправильная, второго рода. Следовательно, левая часть уравнения (4,3) имеет тип [0, 2, 1]. Уравнения такого типа до сих пор не изучены (2).

5. Решение дифференциального уравнения (4,3) при помощи ряда в окрестности особой точки $z = 0$ для $z < 1$ имеет вид

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \quad (1-p < z < z_1), \quad (5,1)$$

где $d_1 = -M_s T_e / J$; $d_3 = 1/3 [2(1 - T_e/T_a) d_2 - M_s T_e^2 / JT_a + c_M U^2 T_e^2 / R_e L_a J]$; $n(n-2)d_n + (n-1)(a-2n+5)d_{n-1} + (n-2)(n-3-a)d_{n-2} + bd_{n-4} = 0$ ($n \geq 4$).

Коэффициенты d_0 и d_2 -- произвольные постоянные. Они определяются из начальных условий $w = 0$ и $dw/dz = 0$. Однако при вычислениях удобно пользоваться рядом (5,1) только при z достаточно малом.

6. Решение дифференциального уравнения (4,3) в окрестности особой точки $z = 1$ для $0 < z < 2$ в случае, когда корни r_1 и r_2 определяющего уравнения $r^2 - ar + b = 0$ и их разность $r_1 - r_2$ не равны целым числам, имеет вид:

$$w(z) = C_1 (1-z)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1-z)^n + C_2 (1-z)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (1-z)^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1-z)^n. \quad (6,1)$$

Здесь коэффициенты α_n и β_n определяются из рекуррентной формулы

$$[(r+n)(r+n-a)+b]c_n + [(r+n-1)(a-r-n+2)-3b]c_{n-1} + 3bc_{n-2} - bc_{n-3} = 0 \quad (n \geq 0);$$

числа α_n соответствуют случаю, когда $r=r_1$ и $c_0=\alpha_0=1$, т. е. $\alpha_n=c_n(r_1)$, аналогичного $\beta_n=c_n(r_2)$ и $c_0=\beta_0=1$. Коэффициенты B_n определяются из формул: $bB_0-b_2=0$; $(1-a+b)B_1-3bB_0-b_1=0$; $(4-2a+b)B_2+(a-3b)B_1+3bB_0-b_0=0$; $(n^2-an+b)B_n+[(n-1)\times(a+2-n)-3b]B_{n-1}+3bB_{n-2}-bB_{n-3}=0$ ($n\geq 3$), где $b_0=a_0$, $b_1=a_1-2a_0$, $b_2=a_0-a_1+a_2$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 мы определим из условия, что решение (6,1), полученное в окрестности точки $z=1$, должно совпадать с решением

(5,1). Для этого достаточно сравнить полученные решения (5,1) и (6,1) в двух каких-либо точках, лежащих в интервале $0 < z < 1$. Выбор этих точек зависит от быстроты сходимости рядов (5,1) и (6,1).

7. Решив уравнение (4,2) относительно v и подставив в него выражение w из (5,1), найдем

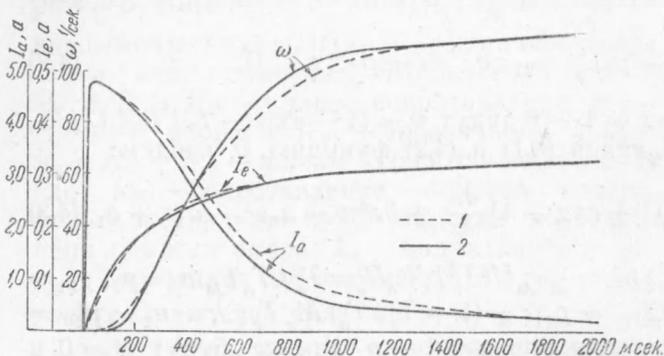


Рис. 2

$$v(z) = \frac{p_{20}}{p_{21}} + \frac{1-z}{p_{21}} \sum_{n=2}^{\infty} n d_n z^{n-2} \quad (1-p \leq z \leq z_1). \quad (7,1)$$

Приняв во внимание начальные условия: при $z=1-p: v=[1-\exp(-t_0/T_a)]U/R_a$, и $dv/dz = \exp(-t_0/T_a)U/L_a$ находим d_0 и d_2 . Аналогично найдем выражение для v в окрестности точки $z=1$:

$$v(z) = \frac{1}{p_{21}z} \left[p_{20} - \sum_{n=1}^{\infty} n B_n (1-z)^n - C_1 (1-z)^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} (n+r_1) \alpha_n (1-z)^n - C_2 (1-z)^{r_2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+r_2) \beta_n (1-z)^n \right]. \quad (7,2)$$

8. Для проверки расчета было проведено экспериментальное исследование переходных процессов пуска электродвигателя мощностью 660 вт. Испытание производилось на холостом ходу при скорости вращения $n=1100$ об/мин. Характеристики, снятые в статических режимах, удовлетворяли предположениям, принятым при выводе полученных формул. На рис. 2 приведены кривые I , построенные по формулам (1) и опытные (2), полученные из осциллограмм. Из приведенных кривых видно, что решение дифференциальных уравнений (1,4) — (1,6) дает удовлетворительное совпадение с экспериментом.

В заключение выражаю глубокую признательность акад. В. С. Кулебакину за постановку задачи и постоянное внимание к моей работе. Приношу благодарность А. В. Алексашкину и В. Ю. Невраеву за проведение экспериментов и числовых расчетов.

Поступило
8 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. С. Кулебакин, К теории импульсного метода регулирования скорости вращения электродвигателей с независимым или постоянным возбуждением, 1948.
² Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1939.