Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Л. МИКАЭЛЯН

ПРИМЕНЕНИЕ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ФОКУСИРОВАНИЯ ВОЛН

(Представлено академиком Б. А. Введенским 1 X 1951)

Пусть имеется среда с непрерывно меняющимся в направлении y показателем преломления $n(y)$ (рис. 1). Линейный источник электромагнитных колебаний, совпадающий с осью OZ, излучает цилиндрические волны. Требуется подобрать такой закон изменения показателя преломления $n(y)$, чтобы все «лучи», посылаемые этим источником, доходили до плоскости $x = x_0$ за один и тот же промежуток времени. Это означает, что волна, имеющая цилиндрический фронт вблизи источника, распространяясь в такой слоистой среде, постепенно деформируется и подходит к плоскости $x = x_0$ с плоским фронтом. Если справа от плоскости $x = x_0$ среда однородна, то участок от прямой OZ до указанной плоскости фокусирует параллельные лучи, падающие на плоскость $x = x_0$, в линию, совпадающую с осью OZ. Если же всюду $n = n(y)$, то получим картину распространения лучей, показанную на рис. 2.

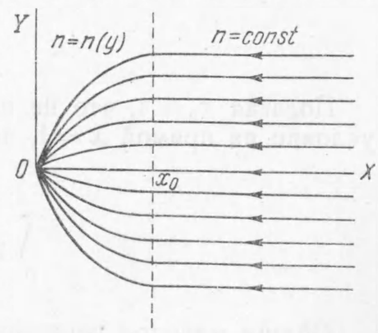

Рис. 1

Предполагая среду и линейный источник бесконечно протяженными вдоль оси OZ, придем к плоской задаче, которая и рассматривается ниже. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о точечном излучателе и прямой $x = x_0$, помня при этом, что все результаты применимы также к линейному излучателю и плоскости $x = x_0$.

Уравнение семейства траекторий лучей $y(x, z)$, где z — точка на прямой $x = x_0$, через которую проходит луч семейства, определяется из условия Ферма

$$\int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(y)}\, dy = \min, \tag{1}$$

где $v(y) = c_0 / n(y)$ — скорость распространения в среде.

Легко показать, что уравнение Эйлера для этого интеграла имеет вид:

$$\frac{1}{v(y)} \frac{\partial v(z)}{\partial y} = \frac{\partial^2 x / \partial y^2}{\partial x / \partial y\, [1 + (\partial x / \partial y)^2]}, \tag{2}$$

где $x = x(y, z)$ — уравнение семейства траекторий.

Интегрируя его по y, получим

$$v(y) = \frac{\varphi(z)\, \partial x / \partial y}{\sqrt{1 + (\partial x / \partial y)^2}}. \tag{3}$$

Учитывая, что все лучи должны быть параллельны при пересечении прямой $x = x_0$, т. е. $\partial x / \partial y|_{y=z} = \infty$, найдем

$$\varphi(z) = v(z). \tag{4}$$

Интегрируя еще раз, получим

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(v(z)/v(y))^2 - 1}}. \tag{5}$$

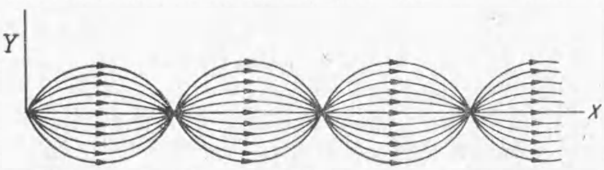

Рис. 2. $n = n(y)$

Полагая $x_0 = 1$, что не нарушает общности, и учитывая граничное условие на прямой $x = 1$, получим интегральное уравнение для $v(y)$

$$\int_0^z \frac{dy}{\sqrt{(v(z)/v(y))^2 - 1}} = 1. \tag{6}$$

Общих методов решения такого интегрального уравнения не известно. Воспользоваться дифференцированием по верхнему пределу здесь нельзя, так как подинтегральная функция имеет особенность в точке $y = z$. Остается путь подбора функции $v(y)$, удовлетворяющей уравнению (6). При этом можно исходить из рассмотрения функции, которая при двойной подстановке пределов давала бы необходимую единицу, а затем, приравнивая производную этой функции по y подинтегральной, получать уравнение для $v(y)$. После довольно долгих вычислений мы нашли таким способом, что решением интегрального уравнения (6) будет функция

$$v(y) = v_0 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} y, \tag{7}$$

и, таким образом, решили сформулированную выше задачу.

Кривая зависимости $n = c_0 / v$ от y приведена на рис. 3.

Уравнение семейства траекторий лучей определим из уравнения (5) с учетом (7). В результате получим

$$y(x, z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Ar\,sh}\left[\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} z \cdot \sin \frac{\pi}{2} x\right]. \tag{8}$$

Заметим в заключение, что можно непосредственно перенести результаты решенной выше плоской задачи к случаю объемной задачи.

В начале O цилиндрической системы координат расположен источник сферических волн. Если показатель преломления изменяется по закону

$$n(r, \varphi, z) = \frac{n_0}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} r}, \tag{8'}$$

то в плоскости $z = 1$ фаза будет постоянна, т. е. сферическая волна, испускаемая источником O, распространяясь в такой слоистой среде, постепенно меняет свой фронт и, подходя к плоскости $z = 1$, превращается в плоскую волну.

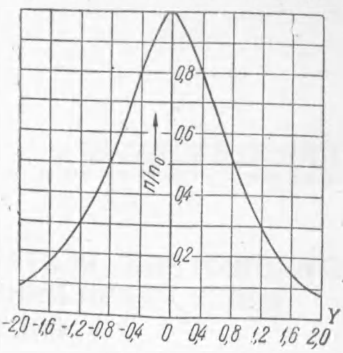

Рис. 3

Автор выражает благодарность чл.-корр. АН СССР А. А. Пистолькорсу за постоянное внимание к работе и проф. К. К. Марджанишвили за советы при решении уравнения (6).

Московский электротехнический
институт связи

Поступило
14 VII 1951