Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 4

ФИЗИКА

Хр. Я. ХРИСТОВ

О ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНУЮ КРИСТАЛЛИЧЕСКУЮ ПЛАСТИНКУ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 9 VII 1951)

Вопрос о преломлении и отражении электромагнитных волн в случае кристаллической среды как результате интерференции падающей волны и элементарных сферических волн, излучаемых электрическими диполями, из которых построен кристалл и из которых каждый колеблется под влиянием падающей волны и волн, излучаемых другими диполями, был наиболее исчерпывающе рассмотрен П. Эвальдом [1] и М. Борном [2]. В этих работах, однако, используются ряды (например, ряды, представляющие векторы Герца), которые не являются сходящимися, и делаются предположения (например, что колебания диполей даже до границ кристалла образуют плоскую монохроматическую волну), лишь приблизительно верные. Поэтому в настоящей работе мы поставили себе целью дать новый метод для точного решения этой задачи. Мы ограничимся рассмотрением одного сравнительно специального случая, несмотря на то, что этот метод можно обобщить во многих направлениях.

Предположим, что кристалл представляет собой плоско-параллельную пластинку, где имеется по одному диполю в клетке, что падающая волна движется нормально относительно пластинки и что она линейно поляризована в направлении одной из осей кристалла. Пусть a, b, c — размеры клетки и пусть $x = ha$, $y = kb$, $z = lc$ $(h, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ l = 0, 1, \ldots, N-1)$ — координаты диполей. Пусть электрический вектор падающей волны колеблется в направлении оси x. Из соображений симметрии ясно, что если пренебречь влиянием магнитного поля на движение диполей, они все будут колебаться гармонично в направлении оси x. При этом электрические моменты $\mathbf{p}^l$ всех диполей, лежащих на плоскости решетки $z = lc$, будут иметь одинаковые амплитуды и фазы, так что можем положить

$$\mathbf{p}_l = (p_l,\ 0,\ 0), \quad p_l = Z_l e^{i\omega t}, \tag{1}$$

где Z_l $(l = 0, 1, \ldots, N-1)$ — комплексные постоянные, а ω — круговая частота падающей волны.

Пусть $\mathbf{E}_l^*$ — сила электрического поля, образованного диполями, лежащими в плоскости $z = lc$. Она представляет сумму напряженностей электрических полей, созданных всеми этими диполями, и, следовательно, выражается двойным бесконечным рядом, который, однако, не является абсолютно сходящимся. Мы предположим, что суммирование произведено так, что $\mathbf{E}_l^*$ представляет периодическую функцию x с периодом a и периодическую функцию y с периодом b. Это можно осуществить, например, если суммировать сначала по возрастающим значениям $|h|$, а потом по возрастающим значениям $|k|$. Имея в виду, что $\mathbf{E}_l^*$ удовлетворяет при $z \neq lc$ волновому уравнению

$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

где v — скорость электромагнитных волн в вакууме, а при $z = lc$ и при $z = \pm\infty$ известны предельные условия, получаем

$$\mathbf{E}_l^* = \begin{cases} -\sum\limits_{\mu} \mathbf{u}_\mu^+ p_l s_\mu^l e^{i(\mathbf{k}_\mu^+ \mathbf{r})} & \text{при } z > lc, \\ -\sum\limits_{\mu} \mathbf{u}_\mu^- p_l s_\mu^l e^{i(\mathbf{k}_\mu^- \mathbf{r})} & \text{при } z < lc, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\alpha = \frac{2\pi}{a}$, $\beta = \frac{2\pi}{b}$, $\gamma_\mu = \sqrt{m^2\alpha^2 + n^2\beta^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}$, $s_\mu = e^{\gamma_\mu c}$, $\mathbf{k}_\mu^\pm = (m\alpha, n\beta, \pm i\gamma_\mu)$, $\mathbf{u}_\mu^\pm = \frac{1}{2ab\,\varepsilon\gamma_\mu}\left(m^2\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2},\ mn\alpha\beta,\ \pm im\alpha\gamma_\mu\right)$. При этом здесь знак квадратного корня выбирается так, чтобы корень был положительным или с положительной мнимой частью; $\mu = (m, n)$ является составным индексом, компоненты которого принимают все целые значения, а $\varepsilon = 10^7 / 4\pi v^2$ — диэлектрическая постоянная вакуума в рационализированной системе единиц, в которой даны все величины.

Пусть $\mathbf{E}_{l0}^*$ — сила электрического поля, которое создают все диполи, лежащие в плоскости $z = lc$, за исключением одного какого-либо из них, в точке, где этот диполь находился. Определив силы электрических полей, которые создают в этой точке диполи, лежащие на прямых $y = kb$, $z = lc$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), и сложив эти силы, получим

$$\mathbf{E}_{l0}^* = C\mathbf{p}_l, \tag{4}$$

где

$$C = \frac{1}{\pi\varepsilon} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h^3 a^3} + \frac{i\omega}{vh^2 a^2}\right) e^{-i\frac{\omega}{v}ha} +$$

$$+ \frac{1}{2a\varepsilon} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(m^2\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2}\right) iH_0^{(2)}\left(-ikb\sqrt{m^2\alpha^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}\right).$$

Здесь также знак корня выбран так, чтобы он был положительным или с положительной мнимой частью.

Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — силы электрического и магнитного поля, которое мы ищем и которое представляет собой сумму падающей волны и волн, излученных диполями. Получим, что при $(l-1)c < z < (l+1)c$ $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляются в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{\mu} \left(\mathbf{a}_{\mu l} e^{i\omega t + i(\mathbf{k}_\mu^+ \mathbf{r})} + \mathbf{b}_{\mu l} e^{i\omega t + i(\mathbf{k}_\mu^- \mathbf{r})}\right), \tag{5}$$

$$\mathbf{H} = -\frac{\varepsilon v^2}{\omega} \sum_{\mu} \left([\mathbf{k}_\mu^+ \mathbf{a}_{\mu l}]\, e^{i\omega t + i(\mathbf{k}_\mu^+ \mathbf{r})} + [\mathbf{k}_\mu^- \mathbf{b}_{\mu l}]\, e^{i\omega t + i(\mathbf{k}_\mu^- \mathbf{r})}\right), \tag{6}$$

где $\mathbf{a}_{\mu l}$ и $\mathbf{b}_{\mu l}$ ($l = 0, 1, \ldots, N$) — подлежащие определению постоянные векторы. При этом естественно, что выражения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в интервалах $-c < z < 0$ и $(N-1)c < z < Nc$ имеют силу и при $z < 0$, соответственно при $z > (N-1)c$. Если $\nu = (m, n)$ является составным индексом, имеющим те же значения, как и μ, за исключением значений $O = (0, 0)$, легко находим

$$\mathbf{a}_{00} = (a_{00}, 0, 0), \quad \mathbf{a}_{\nu 0} = 0, \quad \mathbf{b}_{\mu N} = 0, \tag{7}$$

где a_{00} — данная комплексная постоянная, определяющая амплитуду и фазовую постоянную падающей волны. Наконец, положим

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{E} - \mathbf{E}_l^* \tag{8}$$

и пусть $\mathbf{E}'_{l0}$ — значение $\mathbf{E}'_l$ в местонахождении какого-нибудь диполя в плоскости $z = lc$. Из того, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_l^*$ имеют одни и те же источники в плоскости $z = lc$, следует, что $\mathbf{E}'_l$ будет удовлетворять волновому уравнению (2) во всем интервале $(l-1)c < z < (l+1)c$ длиною $2c$, так что для $\mathbf{E}'_l$ и $\mathbf{E}'_{l0}$ получаем выражения

$$\mathbf{E}'_l = \sum_{\mu} \left(\mathbf{a}'_{\mu l}\, e^{i\omega t + i(\mathbf{R}_\mu^+ \mathbf{r})} + \mathbf{b}'_{\mu l}\, e^{i\omega t + i(\mathbf{R}_\mu^- \mathbf{r})} \right), \tag{9}$$

$$\mathbf{E}'_{l0} = \sum_{\mu} \left(\mathbf{a}'_{\mu l}\, s_\mu^{-l} + \mathbf{b}'_{\mu l}\, s_\mu^{l} \right) e^{i\omega t}, \tag{10}$$

где $\mathbf{a}'_{\mu l}$ и $\mathbf{b}'_{\mu l}$ — соответственно выбранные постоянные векторы.

Пусть M — масса, e — электрический заряд, $-M\omega_x^2$ — коэффициент пропорциональности силы упругости, действующей в направлении оси x, а $e^2 : 6\pi\varepsilon v^3$ — коэффициент силы трения, возникающей вследствие излучения энергии подвижного полюса какого-либо диполя кристалла ([3]). Уравнение движения для любого диполя в плоскости $z = lc$ будет

$$M \frac{d^2 \mathbf{p}_l}{dt^2} - \frac{e^2}{6\pi\varepsilon v^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_l}{dt^3} + M\omega_x^2 \mathbf{p}_l = e^2 \left(\mathbf{E}_{l0}^* + \mathbf{E}'_{l0} \right).$$

Отсюда, имея в виду (4), находим

$$K\mathbf{p}_l = \mathbf{E}'_{l0}, \tag{11}$$

где

$$K = \frac{M}{e^2}\left(\omega_x^2 - \omega^2\right) + \frac{i\omega^3}{6\pi\varepsilon v^3} - C.$$

Подставляя (1) и (10) в (11), находим

$$KZ_l = \sum_{\mu} \left(a'_{\mu l}\, s_\mu^{-l} + b'_{\mu l}\, s_\mu^{l} \right). \tag{12}$$

Если в уравнении (8) при $(l-1)c < z < lc$ и $lc < z < (l+1)c$ заменим $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_l^*$ и $\mathbf{E}'_l$ их значениями из (5), (3) и (9), то, сравнивая коэффициенты, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_{\mu l} &= \mathbf{a}_{\mu l}, & \mathbf{b}'_{\mu l} &= \mathbf{b}_{\mu l} + \mathbf{u}_\mu^- s_\mu^{-l} Z_l, \\ \mathbf{a}'_{\mu l} &= \mathbf{a}_{\mu,\, l+1} + \mathbf{u}_\mu^+ s_\mu^{l} Z_l, & \mathbf{b}'_{\mu l} &= \mathbf{b}_{\mu,\, l+1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Положив для краткости

$$\mathbf{a}_{\mu l} = s_\mu^{l}\, \mathbf{X}_{\mu l}, \quad \mathbf{b}_{\mu l} = s_\mu^{-l+1}\, \mathbf{Y}_{\mu l} \quad (l = 0,\ 1,\ \ldots,\ N) \tag{14}$$

и исключая $\mathbf{a}_{\mu l}$, $\mathbf{b}_{\mu l}$, $\mathbf{a}'_{\mu l}$ и $\mathbf{b}'_{\mu l}$ из (7), (12), (13) и (14), получим для неизвестных $\mathbf{X}_{\mu l}$, $\mathbf{Y}_{\mu l}$ $(l = 0,\ 1, \ldots, N)$ и Z_l $(l = 0,\ 1, \ldots, N-1)$ следующую бесконечную линейную систему уравнений

$$KZ_l = \sum_{\mu} (X_{\mu l} + Y_{\mu, l+1}), \tag{15}$$

$$\mathbf{X}_{\mu l} - s_{\mu} \mathbf{X}_{\mu, l+1} = \mathbf{u}_{\mu}^{+} Z_l, \tag{16}$$

$$\mathbf{Y}_{\mu, l+1} - s_{\mu} \mathbf{Y}_{\mu l} = \mathbf{u}_{\mu}^{-} Z_l, \tag{17}$$

$$\mathbf{X}_{00} = (a_{00}, 0, 0), \quad \mathbf{X}_{\nu 0} = 0, \quad \mathbf{Y}_{\mu N} = 0. \tag{18}$$

$$(l = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Мы покажем, что решение этой бесконечной системы сводится к решению некоторой конечной системы. Действительно, в уравнении (16) дадим l последовательно значения $0, 1, \ldots, l-1$, полученные уравнения помножим, соответственно, на $1, s_{\mu}, s_{\mu}^2, \ldots, s_{\mu}^{l-1}$ и сложим их. Принимая во внимание (18), находим

$$\mathbf{X}_{0l} = -\mathbf{u}_0^{+} (s_0^{-l} Z_0 + s_0^{-l+1} Z_1 + \ldots + s_0^{-1} Z_{l-1}) + s_0^{-l} \mathbf{a}_{00}, \tag{19}$$

$$\mathbf{X}_{\nu l} = -\mathbf{u}_{\nu}^{+} (s_{\nu}^{-l} Z_0 + s_{\nu}^{-l+1} Z_1 + \ldots + s_{\nu}^{-1} Z_{l-1}). \tag{20}$$

Аналогично из (17), давая l значения $N-1, N-2, \ldots, l$, получаем

$$\mathbf{Y}_{\mu l} = -\mathbf{u}_{\mu}^{-} (s_{\mu}^{-1} Z_l + s_{\mu}^{-2} Z_{l+1} + \ldots + s_{\mu}^{-N+l} Z_{N-1}). \tag{21}$$

Положим

$$S_l = \sum_{\mu} u_{\mu} s_{\mu}^{-l}, \tag{22}$$

обозначив через u_{μ} общее значение u_{μ}^{+} и u_{μ}^{-}. Суммируя x-компоненты равенств (19) и (20), получаем

$$\sum_{\mu} X_{\mu l} = -S_l Z_0 - S_{l-1} Z_1 - \ldots - S_1 Z_{l-1} + S_0^{-l} a_{00}. \tag{23}$$

Если в (21) напишем $l+1$ вместо l, то аналогично находим

$$\sum_{\mu} Y_{\mu, l+1} = -S_1 Z_{l+1} - S_2 Z_{l+2} - \ldots - S_{N-l-1} Z_{N-1}. \tag{24}$$

Подстановкой (23) и (24) в (15) находим искомую конечную систему

$$S_l Z_0 + S_{l-1} Z_1 + \ldots + S_1 Z_{l-1} + \\ + KZ_l + S_1 Z_{l+1} + S_2 Z_{l+2} + \ldots + S_{N-l-1} Z_{N-1} = S_0^{-l} a_{00}. \tag{25}$$

Таким образом, уравнения (19), (20), (21) и (25) эквивалентны уравнениям (15), (16), (17) и (18). После того, как из (25) определим неизвестные Z_l, из (19), (20) и (21) определяются $\mathbf{X}_{\mu l}$ и $\mathbf{Y}_{\mu l}$, и тогда с помощью (14), (5), (6) и (1) нетрудно вычислить $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{p}_l$.

Софийский университет
София, Болгария

Поступило
30 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. P. Ewald, Ann. d. Phys., 49, 1 (1916); 49, 117 (1916); 54, 519 (1917). [2] M. Born u. M Göppert-Mayer, Elektromagnetische Gitterwellen, Handb. d. Phys., 24, S. 770—794, Berlin, 1933. [3] Д. Иваненко и А. Соколов, Классическая теория поля, М.— Л., 1949.