Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 4

МЕХАНИКА

В. М. МУЧНИКОВ

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ ПРИЕМЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЕЗДА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 25 IX 1951)

При исследовании влияния профиля на величину продольных усилий в железнодорожных поездах приходится всегда считаться с наличием изломов профиля. Эти изломы при определенных соотношениях длин поездов, величины уклонов Δi, жесткости и других факторов вызывают появление в поездах дополнительных, нередко опасных продольных усилий.

Решение уравнения движения поезда в таком случае — весьма сложная задача. Если же считать, что подвижной состав представляет собой гибкую нерастяжимую нить постоянного сечения, то, как показано в [1,2], задача решается относительно легко.

В статье [3] был указан метод решения уравнения движения поезда (по горизонтальному пути) для случая, когда не вводится ограничения об однородности подвижного состава.

В данной работе излагается общий метод решения задачи о движении поезда по профилю, имеющему изломы; при этом поезд считается упругим, что при большой его длине весьма существенно, а также учитывается влияние силы тяги локомотива и силы тяжести той части поезда, которая находится на уклоне.

Будем, следовательно, полагать, что поезд передвигается по профилю, имеющему один или несколько изломов на протяжении длины состава. В дальнейшем мы применяем к данной проблеме методы операционного исчисления. Полагая начало координат на свободном конце поезда и применяя подвижную систему координатных осей, придем к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q_1 \sigma_0 (x) - q_1 \sigma_0 [vt - (l - x)] + q_2 \sigma_0 [vt - (l + L - x)]; \tag{1}$$

$u(x, t)$ — смещения промежуточных сечений в точке x в момент времени t; $a^2 \nu = k$; k — жесткость; ν — масса единицы длины поезда.

Правая часть (1) представляет кусочно-непрерывную функцию, принимающую в случае, например, двух изломов профиля следующие значения:

$$q(x, t) = \begin{cases} q_1 = \frac{q_0}{\nu} \Delta i_1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l - vt; \\ 0 & \text{»} \quad l - vt \leqslant x \leqslant l - vt + L; \\ q_2 = \frac{q_0}{\nu} \Delta i_2 & \text{»} \quad l - vt + L \leqslant x \leqslant l; \end{cases}$$

здесь l — длина поезда; L — длина горизонтального участка пути между изломами; $l - vt$ — длина участка от начала координат до первого излома; g — ускорение силы тяжести; q_0 — вес единицы длины поезда. При $t=0$ смещение и скорость принимаются равными нулю.

$$p^2 V(x, p) - a^2 V'(x, p) = q_1 - \frac{q_1}{v} e^{-p\left(\frac{l-x}{v}\right)} + \frac{q_2}{v} e^{-p\left(\frac{l+L-x}{v}\right)}, \tag{2}$$

p — оператор.

Решая уравнение (2) относительно $V(x, p)$ и потребовав выполнения условий:

$$V(x, 0) = V'(x, 0) = V'(0, p) = 0,$$

$$\delta p^2 V(l, p) + V'(l, p) = 0,$$

получим

$$\tau(x, p) = kV'(x, p) = \frac{k\varepsilon^2}{v^2(1-\varepsilon^2)p}\left\{(q_1 - q_2 e^{-p\beta}) \frac{\left(\frac{\sigma\varepsilon p + 1}{\sigma\varepsilon + 1}\right)(e^{p\varepsilon x} - e^{-p\varepsilon x})}{e^{p\varepsilon} - \varkappa e^{-p\varepsilon}} + \right.$$
$$\left. + (q_1 e^{-p} - q_2 e^{-p(1+\beta)}) \frac{e^{p\varepsilon(1-x)} - \varkappa e^{-p\varepsilon(1-x)}}{e^{p\varepsilon} - \varkappa e^{-p\varepsilon}} e^{-p} - q_1 e^{-p(1-x)} + q_2 e^{-p(1+\beta-x)}\right\}. \tag{3}$$

Таким образом, мы получили общее решение задачи в замкнутой форме.

Усилия в промежуточных сечениях определяются следующим выражением:

$$\tau(x, p) = \frac{k\varepsilon^2}{v^2(1-\varepsilon^2)}\left\{(q_1 - q_2 e^{-p\beta})\left[\frac{1}{p}\frac{\operatorname{sh}\varepsilon p x}{\operatorname{sh}\varepsilon p} + \sigma\left(\varepsilon\frac{\operatorname{sh}\varepsilon p x}{\operatorname{sh}\varepsilon p} - \frac{\operatorname{sh}\varepsilon p x}{\operatorname{sh}\varepsilon p \operatorname{th}\varepsilon p}\right)\right] + \right.$$
$$+ (q_1 e^{-p} - q_2 e^{-p(1+\beta)})\left[\frac{1}{p}\frac{\operatorname{sh}\varepsilon p(1-x)}{\operatorname{sh}\varepsilon p} + \right.$$
$$\left.\left. + \sigma\left(\frac{\operatorname{ch}\varepsilon p(1-x)}{\operatorname{sh}\varepsilon p} - \frac{\operatorname{sh}\varepsilon p(1-x)\operatorname{cth}\varepsilon p}{\operatorname{sh}\varepsilon p}\right)\right] - (q_1 - q_2 e^{-p\beta}) e^{-p(1-x)}\right\}. \tag{4}$$

Здесь обозначено: $\bar{p} = pl/v$, $\bar{p}\beta = pL/v$, $\varepsilon = \bar{v}/a$, $\bar{x} = x/l$, $\beta = L/l$, $\varkappa = (1-\sigma p)/(1+\sigma p)$, $\sigma = \delta a v/l$, $\delta = Q/kg$, Q — вес локомотива, $p(l-x)/v = \bar{p}(1-\bar{x})$. Штрихи над p и x в (4) и далее опущены.

Выражение (4) в результате применения второй теоремы разложения Хевисайда может быть представлено в форме ряда, сходимость которого, однако, будет очень медленной [4]. Более эффективным оказывается способ проведения решения по отдельным этапам путем разложения изображения в ряд по степеням показательных функций.

$$f_1(x, t) \doteqdot \frac{1}{p}\frac{\operatorname{sh}\varepsilon p x}{\operatorname{sh}\varepsilon p} = \frac{1}{p}\left(e^{-p\varepsilon(1-x)} - e^{-p\varepsilon(1+x)} + e^{-p\varepsilon(3-x)} - e^{-p\varepsilon(3+x)} + \ldots\right),$$

$$f_2(x, t) \doteqdot \frac{e^{-p}}{p}\frac{\operatorname{sh}\varepsilon p(1-x)}{\operatorname{sh}\varepsilon p} = \frac{1}{p}\left(e^{-p(1+\varepsilon x)} - e^{-p(1-\varepsilon x+2\varepsilon)} + \right.$$
$$\left. + e^{-p(1+\varepsilon x+2\varepsilon)} - e^{-p(1-\varepsilon x+4\varepsilon)} + e^{-p(1+\varepsilon x+4\varepsilon)} - \ldots\right).$$

Используя полученное разложение, получаем, например, следующие значения функций:

$$f_1(x, t) = 2\varepsilon x \quad \text{в интервале} \quad \varepsilon(1+x) \leqslant t \leqslant \varepsilon(3-x),$$

$$f_2(x, t) = 2\varepsilon(1-x) \quad \text{в интервале} \quad 2\varepsilon - \varepsilon x + 1 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon x + 1.$$

Выражение (4) позволяет получить вообще ряд решений, которые будут соответствовать различным соотношениям между величинами ε и σ. Физический смысл возможных вариантов будет состоять в том, что (например, при малых ε) продольные усилия вызываются, главным образом, силами растяжения, а не сжатия. Вообще же различные варианты могут соответствовать различным случаям взаимодействия этих волн.

Далее, получим

$$T_1(x, t) = \frac{k\varepsilon^2}{v^2(1-\varepsilon^2)}\{q_1[(1-x)(1-\varepsilon)+\sigma(\varepsilon+1)] - q_2[\beta\varepsilon+(1-\varepsilon)(1-x)+\sigma\varepsilon]\}$$
$$\text{при } \varepsilon(1-x)\leqslant t\leqslant 1-x;$$

$$T_2(x, t) = \frac{k\varepsilon^2}{v^2(1-\varepsilon^2)}\{q_1[2\varepsilon x+\sigma(\varepsilon+1)] - q_2[\beta\varepsilon+\beta+2\varepsilon x+\sigma(\varepsilon+1)]\} \quad (5)$$
$$\text{при } 1-x\leqslant t\leqslant\varepsilon(1+x);$$

$$T_3(x, t) = \frac{k\varepsilon^2}{v^2(1-\varepsilon^2)}\{q_1[2\varepsilon x - t + 1 - x - \sigma(\varepsilon+3)] -$$
$$- q_2[\varepsilon(2x+\beta) - t + 1 - x + \beta - \sigma(\varepsilon+3)]\}$$
$$\text{при } \varepsilon(1+x)\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon x+2\varepsilon.$$

Часто на протяжении длины поезда l встречается только один излом. Этот частный случай получается, как легко видеть, непосредственно из общего вывода. Если, кроме того, считать $\varepsilon \ll 1$ (случай растяжения), то

$$T(x, t) \doteq \frac{qk}{a^2}\left[\frac{x}{p}\,\frac{1}{1+\mu} + \frac{e^{-p}}{p}\,\frac{1-x+\mu}{1+\mu} - \frac{e^{-p(1-x)}}{p}\right], \quad (6)$$

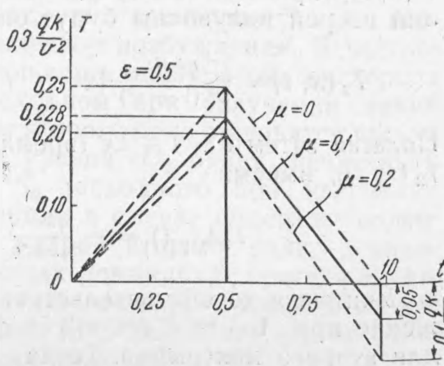

Рис. 1

или, в окончательной форме:

$$T_1(x, t) = \frac{qk}{a^2}\,\frac{xt}{1+\mu} \qquad \text{при } 0\leqslant t\leqslant 1-x;$$

$$T_2(x, t) = \frac{qk}{a^2}\left\{\frac{xt}{1+\mu} - [t-(1-x)]\right\} \qquad \text{при } 1-x\leqslant t\leqslant 1;$$

$$T_3(x, t) = 0 \qquad \text{при } t\geqslant 1.$$

В случае же, если $1/c^2 = 0$, т. е. когда влиянием локомотива пренебрегают, получим:

$$T(x, t) \doteq \frac{qk}{va^2p(1-\varepsilon^2)}\left[\frac{\operatorname{sh}\varepsilon px}{\operatorname{sh}\varepsilon p} + e^{-p}\frac{\operatorname{sh}\varepsilon p(1-x)}{\operatorname{sh}\varepsilon p} - e^{-p(1-x)}\right].$$

Значения $T(x, t)$ в соответствующих интервалах изменения t находятся по вышеуказанному уже приему.

В частном случае $(x = 0{,}5)$ график изменения усилий будет иметь вид, приведенный на рис. 1.

При $\mu = \sigma/\varepsilon = 0$ отрицательная ордината в точке $t = 1$ будет равна нулю, т. е. сила торможения не будет оказывать влияния на величину продольных усилий. Наибольшая ордината при $t = 0{,}5$ в этом случае будет равна $0{,}25\,qk/a^2$.

Изложенным выше способом легко может быть рассмотрен как случай двойной тяги ($\mu = 0{,}2$), так и случай движения поезда по излому с двумя локомотивами в противоположных концах. В этом последнем случае следует считать $\delta p^2 V(0, p) = V'(0, p)$ и $\delta p^2 V(l, p) = -V'(l, p)$, и тогда

$$\tau(x, p) = \frac{qlk}{a^2 v}\left[\left(\frac{1}{1+2\mu}\right)\frac{x+\mu}{p} - \frac{1}{p}\, e^{-p(1-x)}\right].$$

Чтобы найти сечение с наибольшим значением $T(x, t)$ следует использовать неравенство $(1+\varepsilon)x > 1-\varepsilon$.

Представляя (4) в виде ряда и затем применяя к нему теорему запаздывания для первого интервала изменения t, найдем:

$$T_1(x, t) = \frac{qk\varepsilon^2(1-x)}{v^2(1+\varepsilon)} \quad \text{при } \varepsilon(1-x) \leqslant t \leqslant 1-x. \tag{7}$$

В следующем интервале необходимо учесть влияние функции $f_2(x, t)$; в этом случае имеет место неравенство $\varepsilon(1-x) < 1-x < 1+\varepsilon x$. Но в интервале $\varepsilon(1-x) < 1-x$ $x > \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, и тогда $T(x, t)$ определяется по (7). Поэтому при $t > \varepsilon(1+x)$ ординаты усилий второй полуволны будут определяться уже формулой

$$T_2(x, t) = \frac{qk\varepsilon^2}{v^2(1-\varepsilon^2)}[2\varepsilon x - t - x + 1], \quad 1+\varepsilon x \geqslant t \geqslant \varepsilon(1+x).$$

Полагая затем $t = 1+\varepsilon x$ (время, соответствующее началу вступления $f_2(x, t)$), имеем:

$$T_2(x, t) = -\frac{qk\varepsilon^2 x}{1+\varepsilon} \quad \text{при } \varepsilon(1+x) < 1+\varepsilon x. \tag{8}$$

Учитывая то обстоятельство, что функция $f_2(x, t)$ имеет продолжение при $1+\varepsilon x < t < \varepsilon(3-x)$, находим теперь новое значение x для второго максимума. Тогда

$$x \leqslant \frac{3\varepsilon - 1}{2\varepsilon}, \quad T_2(x, t) = -\frac{qk\varepsilon(3\varepsilon-1)}{2v^2(1+\varepsilon)}.$$

Нетрудно показать, что в данном случае $T_2(x, t) < T_1(x, t)$.

Рассмотрим теперь вопрос, при каких значениях x $T_2(x, t)$ во второй полуволне может превышать $T_1(x, t)$. Составим для этого неравенство, исходя из (7) и (8): $x(1-\varepsilon) > (1-x)(1-\varepsilon)$, или $x > 1-x$, откуда $x > 0{,}5$. Следовательно, $T_2(x, t)$ будет больше $T_1(x, t)$ в случае, когда x будет больше 0,5 (отсчет идет от начала координат).

Аналогичное исследование этим же путем проводится для последующих промежутков времени.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Л. Н. Гутману за ряд ценных указаний по этой работе.

Поступило
25 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, 1950. [2] Н. Е. Жуковский, Собр. соч., 8, 221, 1937. [3] В. М. Мучников, ДАН, 66, № 6 (1949). [4] С. А. Богомолов и С. А. Гельфер, Тр. Военно-транспортн. акад., № 2, 129 (1945).