Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 4

МЕХАНИКА

А. А. ВОРОНОВ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С ПЕРЕМЕННЫМ ТРЕНИЕМ

(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 27 IX 1951)

Для описания процесса свободных колебаний коротких пружин часто используют линейное дифференциальное уравнение вида

$$x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = 0. \tag{1}$$

Известно, что линеаризация осциллятора, в котором существенную роль играет внутреннее трение, посредством (1) дает удовлетворительные качественные, но плохо согласующиеся с опытом количественные результаты.

Основные противоречия с опытом сводятся к следующим: а) в линеаризованном осцилляторе (при $h = \text{const}$) декремент затухания зависит от частоты; в реальном — не зависит; б) в линеаризованном осцилляторе (при $h = \text{const}$) декремент затухания не зависит от амплитуды; в реальном независимость от амплитуды подтверждена опытом для малых колебаний ([1,4]), при возрастании же амплитуды колебаний наблюдается и возрастание декремента затухания.

Для анализа устойчивости в малом сложных динамических систем, в которые рассматриваемый осциллятор входит как составная часть (например систем автоматического регулирования), второе из отмеченных противоречий не играет, таким образом, роли, но первое остается весьма существенным.

Введем допущение, что направление силы внутреннего трения в упругих пластинах зависит от знака скорости так же, как в осцилляторах с обычным сухим трением, но что величина силы трения зависит от деформации пружины. Ниже указывается общий метод исследования при зависимости силы от деформации в виде полинома и наиболее подробно рассматривается случай линейной зависимости. Показывается, что при этом допущении оказывается возможным достаточно просто линеаризовать систему, аппроксимировав уравнение ее движения уравнением вида (1), в котором, однако, величина h уже не постоянна, а является функцией частоты колебаний. Декремент затухания при этом уже не зависит от частоты, и первое из отмеченных выше противоречий отпадает.

Рассмотрим упругий колебательный элемент с сосредоточенной массой, предположив, что в процессе колебаний возникает некоторая сила сопротивления движению $f(x)$, которая является функцией деформации элемента и направлена противоположно скорости

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -k^2 f(x) \operatorname{sign} \dot{x}. \tag{2}$$

Допустим, что $f(x)$, которую назовем силой переменного трения, аппроксимируется полиномом:

$$f(x) = f_0(x) + |f_1(x)|,$$

где

$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} x^{2k}, \quad f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} x^{2k+1}. \tag{3}$$

В частности, при $f_1(x) \equiv 0$, $a_{2k} = 0$ $(k \geqslant 1)$ получаем осциллятор с сухим кулоновским трением.

Исследование уравнения (2) можно заменить исследованием обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -k^2 f(x), \tag{4}$$

учтя при этом, что $f(x)$ в различных квадрантах фазовой плоскости, x, $\dot{x} = y$ принимает значения:

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{I}}(x) &= f_0(x) + f_1(x); \quad f_{\mathrm{III}}(x) = -f_{\mathrm{I}}(x); \\ f_{\mathrm{II}}(x) &= f_0(x) - f_1(x); \quad f_{\mathrm{IV}}(x) = -f_{\mathrm{II}}(x). \end{aligned} \tag{5}$$

В каждом из квадрантов фазовой плоскости уравнение семейства отрезков фазовых траекторий имеет вид:

$$y^2 + \omega_0^2 x^2 + 2k^2 \int f(x)\,dx = C, \tag{6}$$

где C — параметр семейства.

Предположим, что функции $f(x)$ обладают тем свойством, что, распространяя каждую из них на всю фазовую плоскость, мы в результате решения уравнения (4) для этой функции получим периодическое движение около минимума потенциальной энергии, который имеет место при устойчивом состоянии равновесия

$$x = \pm \frac{k^2}{\omega_0^2} a_0.$$

При этом допущении решение уравнения (4) может быть найдено, например, методом Ляпунова — Линдстедта ([2]).

Фазовую траекторию и декремент затухания свободных колебаний для уравнения (2) при этом можно будет найти, не решая уравнения, путем сопряжения отрезков фазовых траекторий в местах их пересечения с осями.

Ниже рассматривается частный случай:

$$\begin{aligned} & f_0(x) \equiv 0; \quad f_1(x) = x; \\ & \ddot{x} + \omega_0^2 x = -k^2 |x| \operatorname{sign} \dot{x}. \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнение (7) оказывается удобным для описания малых колебаний коротких пружин с сосредоточенной массой. Принятие его равносильно допущению, что при деформациях пружины в ее сечениях возникают силы внутреннего трения, пропорциональные деформации и направленные навстречу движению.

Из (5) и (6) в данном случае получаются уравнения отрезков фазовых траекторий

$$y^2 + (\omega_0^2 + k^2)\, x^2 = C \quad \text{для I и III квадрантов;}$$

$$y^2 + (\omega_0^2 - k^2)\, x^2 = C \quad \text{для II и IV квадрантов.}$$

Это уравнения эллипсов, так как наложенное выше на $f(x)$ ограничение в данном случае сводится к неравенству $k^2 < \omega_0^2$ (практически обычно $k^2 \ll \omega_0^2$).

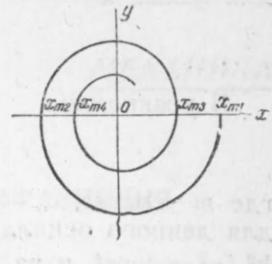

Рис. 1

Фазовые траектории подобного типа изучены весьма полно ([3]).

В нашем случае отношение вертикальной полуоси эллипса к горизонтальной равно $\sqrt{\omega_0^2 + k^2}$ для I и III квадрантов и $\sqrt{\omega_0^2 - k^2}$ для II и IV.

Траектории скручиваются к началу координат (рис. 1). Из соотношения полуосей легко определяется декремент затухания колебаний, равный отношению амплитуд в начале и конце периода:

$$\delta = \frac{x_{m1}}{x_{m3}} = \frac{\omega_0^2 + k^2}{\omega_0^2 - k^2}; \tag{8}$$

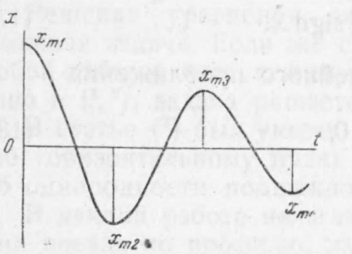

Рис. 2

для малых k^2

$$\delta \cong 1 + 2\frac{k^2}{\omega_0^2}. \tag{9}$$

Свободные колебания изображаются кривой, составленной из четвертей синусоид с периодами $2\pi/\sqrt{\omega_0^2 + k^2}$ и $2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - k^2}$ (рис. 2).

Период затухающих колебаний равен

$$T = \frac{\pi\left[\sqrt{\omega_0^2 + k^2} + \sqrt{\omega_0^2 - k^2}\right]}{\sqrt{\omega_0^4 - k^4}}; \tag{10}$$

для малых k^2

$$T \cong \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{11}$$

Для исследования более сложных динамических систем, например, систем автоматического регулирования, в которые рассматриваемые осцилляторы с переменным трением входят как составная часть, представляет интерес для приближенного описания процесса заменить нелинейное уравнение (7) линейным:

$$\ddot{x} + 2h_k\dot{x} + \omega_k^2 x = 0. \tag{12}$$

Выберем эквивалентный коэффициент демпфирования h_k и эквивалентную частоту ω_k таким образом, чтобы в решениях уравнений (7) и (12) совпадали периоды и амплитуды затухающих колебаний. Получим:

$$\omega_k = \frac{\sqrt{\omega_0^4 - k^4}}{\left[\sqrt{\omega_0^2 + k^2} - \sqrt{\omega_0^2 - k^2}\right]}; \tag{13}$$

для малых k^2

$$\omega_k \cong \omega_0. \tag{14}$$

$$h_k = \frac{\sqrt{\omega_0^4 - k^4}}{\pi\left[\sqrt{\omega_0^2 + k^2} - \sqrt{\omega_0^2 - k^2}\right]} \ln \frac{\omega_0^2 + k^2}{\omega_0^2 - k^2}; \tag{15}$$

для малых k^2

$$h_k \cong \frac{\omega_0}{2\pi} \ln\left[1 + 2\frac{k^2}{\omega_0^2}\right]. \tag{16}$$

В уравнении

$$m\ddot{x} + c_0 x = \pm c_k x,$$

где m — масса, c_0 — жесткость, отношение c_k / c_0 является величиной, для данного осциллятора постоянной. Тогда $\omega_0^2 = c_0 / m$; $k^2 = |c_k / m|$; $k^2 / \omega_0^2 = \mathrm{const}$, и из (8) вытекает, что декремент затухания от частоты колебаний не зависит.

Зависимость декремента затухания от амплитуды при больших отклонениях может быть учтена, если при аппроксимации силы трения принять для $f(x)$ более сложную зависимость, включающую высшие степени x. Однако при этом уравнение становится существенно нелинейным.

Допустим теперь, что в системе присутствует и вязкое трение

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = -k^2 |x| \operatorname{sign} \dot{x}. \tag{17}$$

Аналогичным методом получим для линейного приближения:

$$\ddot{x} + 2h_m\dot{x} + \omega_m^2 x = 0, \tag{18}$$

где $h_m = h + \frac{1}{T} \ln \frac{\omega_0^2 + k^2 - h_k^2}{\omega_0^2 - k^2 - h_k^2}$;

для малых $k^2 + h^2$

$$\omega_m \cong \omega_0, \quad h_m = h + h_k.$$

В осцилляторах с малыми вязким и внутренним трением коэффициенты демпфирования вязкого и внутреннего трения складываются арифметически.

Институт автоматики и телемеханики
Академии наук СССР

Поступило
15 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Давиденков, ЖТФ, **8**, в. 6 (1938). [2] Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Курс теоретической механики, **2**, 1948, стр. 484. [3] А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 1937, стр. 22. [4] F. Förster, Zs. f. Metallk., **29**, No. 4, 109 (1937).