Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 4

МЕХАНИКА

И. С. АРЖАНЫХ

ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ УПРУГОГО ТЕЛА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 30 IX 1951)

Вихрь и объемное расширение являются основными физическими величинами, определяющими процесс деформации в упругом теле. Здесь мы построим новые интегральные уравнения для изображений по Лапласу этих величин.

Пусть $Q+S$ — область упругого тела. Вектор перемещения $\mathbf{v}(q, t)$ удовлетворяет внутри области уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{dt^2} = \mathbf{R} + \alpha \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \beta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad \alpha = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \ \beta = \frac{\mu}{\rho},$$

начальным условиям $\mathbf{v}(q, 0) = \mathbf{v}_0$, $\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_0 = \mathbf{v}_0'$ и одному из граничных условий:

а) первая задача $\mathbf{v}(s, t) = \mathbf{v}_s$ на S;

б) вторая задача $2\mu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu [\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{v}] - h(s)\, \mathbf{v}(s, t) = \mathbf{P}_n(s, t)$.

Соответствие, устанавливаемое преобразованием Лапласа

$$\mathbf{u}(q, \eta) = \int_0^\infty \mathbf{v}(q, t) \exp(-\eta t)\, dt,$$

обозначим знаком $\|$, т. е. $\mathbf{u} \| \mathbf{v}$; пусть

$$\vartheta \| \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \overline{\omega} \| \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad \eta^2 \mathbf{u} - \mathbf{v}_0' - \eta \mathbf{v}_0 \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{dt^2} \right.,$$

$$\mathbf{f} \| \mathbf{R}, \quad \mathbf{F}_n \| \mathbf{P}_n, \quad u_s \| \mathbf{v}_s.$$

Для изображений задача состоит в том, чтобы определить правильный (Q внутри S) или регулярный в смысле В. Д. Купрадзе [1] (Q вне S) вектор $\mathbf{u}(q, \eta)$, удовлетворяющий уравнению Ляме

$$-\eta^2 \mathbf{u} + \alpha \operatorname{grad} \vartheta - \beta \operatorname{rot} \overline{\omega} + \mathbf{f} = 0, \quad \vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \overline{\omega} = \operatorname{rot} \overline{\mathbf{u}} \tag{1}$$

и соответствующему граничному условию. Пусть $r = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$, $p, q \in Q + S$,

$$\varphi_c(p, q) = \begin{cases} \dfrac{1}{r} \exp\left(\dfrac{\eta}{\sqrt{c}}\, r\right) & (Q \text{ внутри } S), \\ \dfrac{1}{r} \exp\left(-\dfrac{\eta}{\sqrt{c}}\, r\right) & (Q \text{ вне } S), \end{cases}$$

а $\psi_c(p, q)$ — правильное (Q внутри S) или регулярное (Q вне S) относительно точек p и q решение уравнения

$$\nabla^2\psi - \frac{\eta^2}{c}\psi = 0, \quad c = \text{const}. \tag{2}$$

Поверхность S будем предполагать замкнутой; нормаль $n(s)$ направим вне Q. Условимся обозначать объемный интеграл знаком $\int$, а интеграл по поверхности знаком $\oint$.

Лемма. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вектор* $\mathbf{u}$ *удовлетворял уравнению* (1), *состоит в том, чтобы он удовлетворял следующему интегро-дифференциальному уравнению*:

$$\mathbf{u}(p) = \frac{1}{4\pi c}\int \Phi_c(p, q)\,\mathbf{f}(q)\,dq + \frac{k}{4\pi}\int \vartheta\nabla_q\Phi_c dq + \frac{l}{4\pi}\int [\overline{\omega}\nabla_q\Phi_c]\,dq +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\oint \Phi_c(p, s)\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n} - k\mathbf{n}\vartheta + l[\mathbf{n}\overline{\omega}]\right)ds - \frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial\Phi_c}{\partial n}\mathbf{u}\,ds, \tag{3}$$

где $\Phi_c = \psi_c + \varphi_c$, $k = 1 - \alpha/c$, $l = 1 - \beta/c$.

Доказательство основано на формуле Грина [1] и проводится так же, как и в случае, когда $\eta = 0$ [2].

Пусть $\gamma = 2\beta$, $\delta = \alpha - \beta$, $\Gamma_c(p, q) = G_c + \varphi_c$, $c = \alpha, \beta, \gamma$, $\Gamma_c(p, s) = 0$,

$$N_\gamma(p, q) = H_\gamma + \varphi_\gamma, \quad \frac{\partial N_\gamma}{\partial n(s)} - \frac{h(s)}{2\mu}N_\gamma(p, s) = 0; \tag{4}$$

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{1}{4\pi\alpha}\left(\int \Gamma_\alpha\mathbf{f}\,dq - \alpha\oint \frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial n}\mathbf{u}_s ds\right), \quad \mathbf{u}_\beta = \frac{1}{4\pi\beta}\left(\int \Gamma_\beta\mathbf{f}\,dq - \beta\oint \frac{\partial\Gamma_\beta}{\partial n}\mathbf{u}_s ds\right),$$
$$\mathbf{u}_\gamma(p) = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\rho\int N_\gamma(p, q)\,\mathbf{f}(q)\,dq + \oint N_\gamma(p, s)\,\mathbf{F}_n(s)\,ds\right). \tag{5}$$

Теорема 1. *Изображения объемного расширения и вихря первой задачи удовлетворяют следующим интегральным уравнениям*:

$$4\pi\alpha\vartheta(p) = \theta_0(p) - \delta\int \tau\left(p, q\,\middle|\,\frac{\eta}{\sqrt{\beta}}\right)\vartheta(q)\,dq, \tag{6}$$

$$\tau = (\nabla_p\nabla_q)\,G_\beta - \frac{\eta^2}{\beta}\varphi_\beta, \quad \theta_0 = 4\pi\beta\,\mathrm{div}_p\mathbf{u}_\beta;$$

$$4\pi\beta\overline{\omega}(p) = \overline{\Omega}_0(p) - \delta\int T\left(p, q\,\middle|\,\frac{\eta}{\sqrt{\alpha}}\right)\overline{\omega}(q)\,dq, \tag{7}$$

$$T = \{\nabla_p\cdot\nabla_q\}\,G_\alpha - I\tau\left(p, q\,\middle|\,\frac{\eta}{\sqrt{\alpha}}\right), \quad \overline{\Omega}_0 = 4\pi\alpha\,\mathrm{rot}_p\mathbf{u}_\alpha - \delta\nabla_p\oint \varphi_\alpha(\mathbf{n}\overline{\omega})\,ds;$$

$$4\pi\alpha\vartheta(p) = \theta_1 - \delta\int(\mathbf{g}_\alpha\omega)\,dq, \quad 4\pi\beta\omega(p) = \overline{\Omega}_1 - \delta\int \mathbf{g}_\beta\vartheta\,dq, \tag{8}$$

$$\mathbf{g}_\alpha = [\nabla_p\nabla_q]\,G_\alpha(p, q), \quad \mathbf{g}_\beta = [\nabla_p\nabla_q]\,G_\beta(p, q),$$

$$\theta_1 = 4\pi\alpha\,\mathrm{div}_p\mathbf{u}_\alpha, \quad \overline{\Omega}_1 = 4\pi\beta\,\mathrm{rot}_p\mathbf{u}_\beta.$$

Изображение вектора перемещения вычисляется из уравнения (1) *или по одной из формул*

$$\mathbf{u}(p) = \mathbf{u}_\beta - \frac{\delta}{4\pi\beta}\int \vartheta\nabla_q\Gamma_\beta dq = \mathbf{u}_\alpha + \frac{\delta}{4\pi\alpha}\int [\overline{\omega}\nabla_q\Gamma_\alpha]\,dq. \tag{9}$$

Доказательство. Положим в уравнении (3) $c=\beta$ и вычислим $\vartheta=\operatorname{div}_p \mathbf{u}$, выполнив следующее преобразование:

$$\nabla_p^2 \int \varphi_\alpha(p, q)\, \vartheta(q)\, dq = \frac{\eta^2}{\beta} \int \varphi_\alpha(p, q)\, \vartheta(q)\, dq - 4\pi\vartheta(p). \tag{10}$$

Затем положим $c=\alpha$ и вычислим $\overline{\omega}=\operatorname{rot}_p \mathbf{u}$. Тогда получим уравнения (6) и (7). Если вычислим соответственно $\operatorname{rot}_p \mathbf{u}$ и $\operatorname{div}_p \mathbf{u}$, то получим систему (8).

Теорема 2. *Изображения объемного расширения и вихря второй задачи удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:*

$$\begin{gathered}
4\pi\rho\alpha\vartheta(p) = \theta_2 - \lambda \int \varepsilon\left(p, q \,\middle|\, \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}}\right) \vartheta\, dq - \mu \int \left(\mathbf{e}\left(p, q \,\middle|\, \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}}\right) \overline{\omega}\right) dq, \\
4\pi\rho\beta\overline{\omega}(p) = \overline{\Omega}_2 - \lambda \int \mathbf{e}\left(p, q \,\middle|\, \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}}\right) \vartheta\, dq - \mu \int E\left(p, q \,\middle|\, \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}}\right) \overline{\omega}\, dq,
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\varepsilon = (\nabla_p \nabla_q) H_\gamma - \frac{\eta^2}{\gamma} \varphi_\gamma, \quad \mathbf{e} = [\nabla_p \nabla_q] H_\gamma,$$

$$E = \{\nabla_p \times \nabla_q\} G_\gamma + \{\nabla_p \cdot \nabla_q\} (H_\gamma - G_\gamma) - I\varepsilon\left(p, q \,\middle|\, \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}}\right),$$

$$\theta_2(p) = 8\pi\mu \operatorname{div}_p \mathbf{u}_\gamma, \quad \overline{\Omega}_2(p) = 8\pi\mu \operatorname{rot}_p \mathbf{u}_\gamma.$$

Изображение вектора перемещения определяется из уравнения (1) *или по формуле*

$$\mathbf{u}(p) = \mathbf{u}_\gamma - \frac{1}{8\pi\mu}\left(\lambda \int \vartheta \nabla_q N_\gamma\, dq - \mu \int [\overline{\omega} \nabla_q N_\gamma]\, dq\right). \tag{12}$$

Доказательство. Положим в уравнении (3) $c=\gamma$ и вычислим $\operatorname{div}_p \mathbf{u}$ и $\operatorname{rot}_p \mathbf{u}$, выполнив следующее преобразование:

$$\nabla_p \operatorname{div}_p \int \omega\varphi_\gamma\, dq = \int \{(\omega\nabla_p) \nabla_q G_\gamma + [\omega \operatorname{rot}_p \nabla_q G_\gamma]\}\, dq. \tag{13}$$

Следствие. Изображения объемного расширения и вихря определяются по формулам:

$$\vartheta(p) = \vartheta_* - \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial n} \vartheta(s)\, ds, \quad \overline{\omega}(p) = \overline{\omega}_* - \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial n} \overline{\omega}(s)\, ds, \tag{14}$$

$$\vartheta_*(p) = \frac{1}{4\pi\alpha} \int \Gamma_\alpha \operatorname{div}_q \mathbf{f}\, dq, \quad \overline{\omega}_*(p) = \frac{1}{4\pi\beta} \int \Gamma_\beta \operatorname{rot}_q \mathbf{f}\, dq, \tag{15}$$

причем ϑ и $\overline{\omega}$ в граничных точках удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

а) уравнения первой задачи

$$4\pi\alpha\vartheta(s_0) = \vartheta_0 + \delta \oint \tau_0 \vartheta(s)\, ds, \quad \tau_0 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Gamma_\alpha(q, s)}{\partial n(s)} \tau\left(s_0, q \,\middle|\, \frac{\eta}{\sqrt{\beta}}\right) dq, \tag{16}$$

$$4\pi\beta\overline{\omega}(s_0) = \overline{\omega}_0 + \delta \oint T_0 \overline{\omega}(s)\, ds, \quad T_0 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Gamma_\beta(q, s)}{\partial n(s)} T\left(s_0, q \,\middle|\, \frac{\eta}{\sqrt{\alpha}}\right) dq, \tag{17}$$

$$\vartheta_0 = \theta_0(s_0) - \delta \int \tau \vartheta_* dq, \quad \overline{\omega}_0 = \overline{\Omega}_0(s_0) - \delta \int T\overline{\omega}_* dq;$$

$$4\pi\alpha\vartheta(s_0) = \vartheta_1 + \delta \oint (\mathbf{g}^0_\beta \overline{\omega})\, ds, \quad 4\pi\beta\overline{\omega}(s_0) = \overline{\omega}_1 + \delta \oint \mathbf{g}^0_\alpha \vartheta\, ds, \tag{18}$$

$$\mathbf{g}^0_\alpha(s_0, s) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Gamma_\alpha(q, s)}{\partial n(s)} \mathbf{g}_\beta(s_0, q)\, dq,$$

$$\mathbf{g}^0_\beta(s_0, s) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Gamma_\beta(q, s)}{\partial n(s)} \mathbf{g}_\alpha(s_0, q)\, dq,$$

$$\vartheta_1 = \theta_1(s_0) - \delta \int (\mathbf{g}_\alpha \overline{\omega}_*)\, dq, \quad \overline{\omega}_1 = \overline{\Omega}_1(s_0) - \delta \int \mathbf{g}_\beta \vartheta_* dq;$$

б) уравнения второй задачи

$$4\pi\rho\alpha\vartheta(s_0) = \vartheta_2 + \lambda \oint \varepsilon_0 \vartheta\, ds + \mu \oint (\mathbf{e}^0_\beta \overline{\omega})\, ds,$$

$$4\pi\rho\beta\overline{\omega}(s_0) = \overline{\omega}_2 + \lambda \oint \mathbf{e}^0_\alpha \vartheta\, ds + \mu \oint E_0 \overline{\omega}\, ds, \tag{19}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial n(s)} \varepsilon\left(s_0, q \,\Big|\, \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}}\right) dq, \quad E_0 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial n(s)} E\left(s_0, q \,\Big|\, \frac{\eta}{\sqrt{\gamma}}\right) dq,$$

$$\mathbf{e}^0_\alpha = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial n(s)} \mathbf{e}\, dq, \quad \mathbf{e}^0_\beta = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \Gamma_\beta}{\partial n(s)} \mathbf{e}\, dq,$$

$$\vartheta_2 = \theta_2(s_0) - \lambda \int \varepsilon \vartheta_* dq - \mu \int (\mathbf{e}\overline{\omega}_*)\, dq, \quad \overline{\omega}_2 - \overline{\Omega}_2(s_0) - \lambda \int \mathbf{e}\vartheta_* dq - \mu \int E\overline{\omega}_* dq.$$

Действительно, изображения объемного расширения и вихря удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$-\eta^2\vartheta + \alpha\nabla^2\vartheta + \operatorname{div}\mathbf{f} = 0, \quad -\eta^2\overline{\omega} + \beta\nabla^2\overline{\omega} + \operatorname{rot}\mathbf{f} = 0.$$

Заметим, что для второй внешней задачи можно взять $h(s) = 0$, если реакция основания не учитывается, но для внутренней задачи $h \neq 0$.

Институт математики и механики
Академии наук Узб.ССР

Поступило
30 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Купрадзе, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, М., 1950. [2] И. С. Аржаных, Прикл. матем. и мех., 15, в. 3 (1951).