

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН

**ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ А. Н. КОЛМОГОРОВА
И С. М. НИКОЛЬСКОГО**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 IX 1951)

Настоящее сообщение относится к проблеме А. Н. Колмогорова об оценках приближений для классов функций.

Рассматриваемым здесь аппаратом приближения являются интегральные операторы Н. И. Ахиезера — Б. М. Левитана:

$$\sigma_n(f, \theta_n; x) = \int_0^\infty \left\{ f\left(x + \frac{t}{n\theta_n}\right) + f\left(x - \frac{t}{n\theta_n}\right) \right\} G_n(t) dt, \quad (1)$$

$$G_n(t) = \frac{\cos \frac{1-\theta_n}{\theta_n} t - \cos \frac{t}{\theta_n}}{\pi t^2}, \quad 0 < \theta_n \leq 1,$$

определенные в пространстве всех измеримых на вещественной оси функций $f(x)$, для которых $\frac{f(x)}{1+x^2} \in L(-\infty, \infty)$.

В случае периодичности $f(x)$ эти операторы представляют собой тригонометрические полиномы ^(3, 6), которые для последовательности $\theta_n = 1/n$ совпадают с частными суммами ряда Фурье.

Указанные полиномы Н. И. Ахиезера — Б. М. Левитана являются весьма удобным аппаратом приближения по двум причинам. Во-первых, когда $\theta_n \rightarrow 0$, они сравнительно мало отличаются от частных сумм ряда Фурье. Во-вторых, при соответствующем выборе последовательности $\{\theta_n\}$ они могут обеспечивать достаточно хороший порядок приближения для обычно рассматриваемых классов функций. Такими классами функций являются, например, классы $KW^{(r)}H^{(\alpha)}$ и $\overline{KW^{(r)}H^{(\alpha)}}$ ($r \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 1$), которые соответственно определяются как класс функций периода 2π , имеющих производную r -го порядка, удовлетворяющую условию Липшица степени α с константой K , и класс функций, тригонометрически сопряженных функциям из $KW^{(r)}H^{(\alpha)}$. При этом число r может быть и дробным. В этом случае производная понимается в смысле Вейля ⁽⁷⁾.

В силу приведенных выше соображений представляет известный интерес решение задачи об асимптотическом поведении соответствующих констант А. Н. Колмогорова, т. е. верхних граней:

$$\mathcal{O}_{\sigma_n}(KW^{(r)}H^{(\alpha)}; x) = \sup_{f \in KW^{(r)}H^{(\alpha)}} |f(x) - \sigma_n(f; \theta, x)|, \quad (2)$$

$$\mathcal{O}_{\sigma_n}(\overline{KW^{(r)}H^{(\alpha)}}; x) = \sup_{f \in KW^{(r)}H^{(\alpha)}} |f(x) - \sigma_n(f; \theta, x)| \quad (3)$$

для произвольной нуль-последовательности $\{\theta_n\}$.

В общем случае Н. И. Ахиезером и Б. М. Левитаном ⁽³⁾ (см. также ⁽⁶⁾) были получены некоторые оценки, выражающие порядок убывания этих величин. Более точные результаты в случае произвольной последовательности $\theta_n \rightarrow 0$, насколько нам известно, в литературе отсутствуют.

С этой точки зрения А. Н. Колмогоровым ⁽¹⁾ впервые были рассмотрены суммы Фурье, соответствующие случаю последовательности $\theta_n = 1/n$, и дано решение задачи на классе $KW^{(r)}H^{(1)}$ (r — целое *).

С. М. Никольский ⁽²⁾ дал решение задачи об асимптотическом поведении констант (2) и (3) для любых неотрицательных r и α в случае приближения суммами Фурье, т. е. $\theta_n = 1/n$.

Мы ставим себе целью дать решение указанной задачи для произвольной последовательности $\theta_n \rightarrow 0$ и выяснить, таким образом, асимптотическое поведение верхних граней (2) и (3) в этом общем случае.

Следующее предложение, которое за недостатком места мы приводим здесь без доказательства, содержит это решение и представляет собой обобщение упомянутых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского.

Теорема. Для любых чисел r и α ($r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$) и для любой последовательности $\theta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\mathcal{O}_{\sigma_n}(KW^{(r)}H^{(\alpha)}; x) = \frac{2^{\alpha+1} K \ln \frac{1}{\theta_n^*}}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \quad (4)$$

$$\mathcal{O}_{\sigma_n}(\overline{KW^{(r)}H^{(\alpha)}}; x) = \frac{2^{\alpha+1} K \ln \frac{1}{\theta_n^*}}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \quad (5)$$

где $\theta_n^* = \max\{\theta_n, 1/n\}$, а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n и всех последовательностей $\{\theta_n\}$, для которых $\theta_n \leq 1 - \theta$ ($\theta > 0$).

Случай $r = 0$, $\alpha = 0$, соответствующий константам Лебега, рассмотрен в ⁽⁵⁾.

При получении соответствующего результата для сумм Фурье ($\theta_n = 1/n$) С. М. Никольский опирался на специфические свойства этого частного случая (см. ⁽²⁾, § 3). Закономерности в поведении ядра, имевшие место при $\theta_n = 1/n$ (суммы Фурье), вообще говоря, нарушаются в общем случае. Последнее обстоятельство известным образом усложняет задачу и приводит к новым затруднениям.

То обстоятельство, что входящие во вторые слагаемые правых частей равенства (4) и (5) величины $O(1)$ равномерно ограничены относительно всех последовательностей $\{\theta_n\}$, для которых $\theta_n \leq 1 - \theta$ ($\theta > 0$), делает эту теорему полезной для практических приложений, так как мы уже отмечали, что при $\theta_n \rightarrow 0$ суммы (1) мало отличаются от конечных сумм ряда Фурье, и при соответствующем выборе такой последовательности они обеспечивают достаточно хорошее приближение, асимптотическая оценка которого дана этими равенствами.

Поступило
30 VII 1951

* Оценки А. Н. Колмогорова впоследствии были распространены на случай дробной производной В. Т. Пинкевичем ⁽⁴⁾.

¹ А. Н. Колмогоров, *Ann. of Math.*, 36 (1935). ² С. М. Никольский, *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, 15 (1945). ³ Н. И. Ахиезер и Б. М. Левитан, *ДАН*, 14, 419 (1937). ⁴ В. Т. Пинкевич, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 521 (1940). ⁵ А. Ф. Тиман, *ДАН*, 64, 175 (1949). ⁶ Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 1947. ⁷ А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, 1939.*

ПОПРАВКА

В статье А. Ф. Тимана, *ДАН*, 77, № 6, стр. 969, формула (2) напечатано

$$\frac{2^{\alpha+1} M(1-x^2)^{\alpha/2}}{\pi^2} \frac{\ln n}{n} \int_0^{\pi/2} t^{\alpha} \sin t \, dt; \text{ должно быть}$$

$$\frac{2^{\alpha+1} M(1-x^2)^{\alpha/2}}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} \int_0^{\pi/2} t^{\alpha} \sin t \, dt.$$