Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Г. СИГАЛОВ

О КОЛЕБАНИИ СТАЦИОНАРНОЙ ФУНКЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 1 X 1951)

Стационарная функция интеграла Дирихле обладает важным свойством «монотонности»: для любой области разность между максимумом (минимумом) функции в области и на ее границе равна нулю. Стационарные функции квадратичных интегралов, рассмотренных Р. Курантом ([1], гл. VI), вообще не обладают этим свойством, но специальные ограничения, налагаемые Р. Курантом на интеграл, позволяют установить связь между максимумом (минимумом) внутри и на границе области.

В настоящей заметке рассматривается указанная связь для квадратичных интегралов без предположений об их положительной определенности и непрерывности или ограниченности коэффициентов. К этому вопросу естественно приводит исследование функциональных свойств решения общего регулярного двойного интеграла.

1. Теорема. *Пусть функция* $Z \in A^2$* *в* $\overline{D}$ *удовлетворяет следующему вариационному условию*:

$$\iint_G \{(aZ_x + bZ_y + dZ + r)\eta_x + (bZ_x + cZ_y + eZ + s)\eta_y + \\ + (dZ_x + eZ_y + fZ + t)\eta\}\, dx\, dy = 0 \tag{1}$$

для любой функции $\eta \in A^2$ *в* $\overline{D}$, *равной нулю в* $\overline{D} - G$, *и для любой области* $\overline{G} \subset D$.

Пусть, далее, для некоторой области $\overline{D}_1 \subset D$ *выполняется*:

1 A. $\iint_D \{|d_1|^{\gamma_1} + |e_1|^{\gamma_1} + |f|^{\gamma_2} + |r|^{\gamma_3} + |s|^{\gamma_3} + |t|^{\gamma_4}\}\, dx\, dy \leqslant L_1$,

$\gamma_1 > 2,\ \gamma_2 > 1,\ \gamma_3 > 2,\ \gamma_4 > 1.$

1 B. $\sup_{(x,y)\in D_1'} |Z(x,y)| \leqslant L_2$.

1 C. $aZ_x^2 + 2bZ_xZ_y + cZ_y^2 \geqslant m(Z_x^2 + Z_y^2)$, где $m > 0$, для любых значений Z_x, Z_y и для почти всех $(x, y) \in D_1$.

1 D. $\iint_{D_1} \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2}\, dx\, dy \leqslant L_1$.

* $Z(x, y)$ мы называем функцией класса A^2 в $\overline{D}$, если она непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, абсолютно непрерывна по $x\,(y)$ для почти всех $y\,(x)$ и Z_x^2, Z_y^2 суммируемы в D.

Тогда

$$|Z(x, y)| \leqslant L_3, \quad (x, y) \in D_1,$$

где L_3 — постоянная, зависящая только от m, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, L_1, L_2$ и не зависящая от коэффициентов $a, b, \ldots$ и области D_1, удовлетворяющих условиям 1 A, 1 B.

2. Доказательство. Пусть $\{G_c\}$, $c_0 < c < c_1$, монотонная система областей меньших значений функции $Z(x, y)$ в D_1 ([3]), $c_0 = \inf Z(x, y)$, $(x, y) \in D_1$; $c_1 = \inf Z(x, y)$, $(x, y) \in D_1'$.

Положим в (1): $G = G_c$, $\eta = Z - c$ при $(x, y) \in G_c$ и $\eta = 0$ при $(x, y) \overline{\in} G_c$. Получаем

$$\iint_{G_c} \{aZ_x^2 + 2bZ_xZ_y + cZ_y^2 + fZ(Z-c) + (2Z-c)(dZ_x + eZ_y) + $$
$$+ rZ_x + sZ_y + t(Z-c)\}\, dx\, dy = 0, \quad c_0 < c < c_1. \tag{2}$$

Из 1 C и (2) следует

$$m\iint_{G_c} (Z_x^2 + Z_y^2)\, dx\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \iint_{G_c} |(2Z-c)(dZ_x + eZ_y) + rZ_x + sZ_y + fZ(Z-c) + t(Z-c)|\, dx\, dy. \tag{3}$$

Не ограничивая общности доказательства, можно считать, что $c_1 < 0$. Тогда $|Z - c| < |c_1|$, $c_0 < c < c_1$. Имеем

$$|(2Z-c)(dZ_x + eZ_y)| \leqslant 4c_0^2(d^2 + e^2)\frac{1}{m} + \frac{m}{4}(Z_x^2 + Z_y^2); \tag{4}$$

$$|rZ_x + sZ_y| \leqslant \frac{1}{m}(r^2 + s^2) + \frac{m}{4}(Z_x^2 + Z_y^2); \tag{5}$$

$$|fZ(Z-c)| \leqslant c_0^2|f|; \ |t(Z-c)| \leqslant |c_0||t|. \tag{6}$$

Из (3) — (6) следует

$$\frac{m}{2}\iint_{G_c} \{Z_x^2 + Z_y^2\}\, dx\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \iint_{G_c} \left\{\frac{4c_0^2}{m}(d^2 + e^2) + \frac{1}{m}(r^2 + s^2) + c_0^2|f| + |c_0 t|\right\} dx\, dy. \tag{7}$$

Положим

$$A(c) = \iint_{G_c} \left\{\frac{4}{m}(d^2 + e^2) + |f|\right\} dx\, dy;$$

$$B(c) = \iint_{G_c} |t|\, dx\, dy;$$

$$C(c) = \iint_{G_c} \frac{1}{m}(r^2 + s^2)\, dx\, dy.$$

Имеем

$$\left\{\iint \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2}\, dx\, dy\right\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{m}\mu(G_c)\{A(c)c_0^2 + B(c)|c_0| + C(c)\}. \tag{8}$$

Из условий 1 A с помощью неравенства Гельдера получаем

$$A(c),\ B(c),\ C(c) \leqslant L_4\,\mu(G_c)^{\omega}, \tag{9}$$

где $\omega > 0$ и L_4 — постоянная, зависящая только от $L_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

Из (8), (9), считая, что $|c_0| \geqslant 1$, получаем

$$\left\{\iint\limits_{G_c} \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2}\,dx\,dy\right\}^2 \leqslant \frac{2}{m} L_4 c_0^2 \mu(G_c)^{1+\omega}. \tag{9'}$$

Пусть $l(c)$ длина границы G_c области G_c в смысле меры Хаусдорфа (2). Нетрудно показать, что имеет место обычное изопериметрическое неравенство

$$\mu(G_c) \leqslant \frac{1}{4\pi} l(c)^2. \tag{10}$$

Кроме того, если положить

$$g(c) = \iint\limits_{G_c} \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2}\,dx\,dy, \tag{11}$$

то для почти всех c, $c_0 < c < c_1$, выполняется (2)

$$g'(c) = l(c). \tag{12}$$

Из (9'), (10), (12) получаем

$$g(c)^2 \leqslant L_5\, g'(c)^{2+2\omega} c_0^2. \tag{13}$$

Из (13) получаем

$$g(c)^{\frac{2}{2+2\omega}} \leqslant L_6\, g'(c)\, |c_0|^{\frac{2}{2+2\omega}}.$$

Положим $\frac{2}{2+2\omega} = 1 - \omega_1$. Интегрируя по c, получаем:

$$\frac{c_1 - c_0}{|c_0|^{1-\omega_1}} \leqslant L_6 \int\limits_{c_0}^{c_1} \frac{g'(c)\,dc}{g(c)^{1-\omega_1}} = \frac{L_6}{\omega_1} g(c_1)^{\omega_1} \ *.$$

Так как $c_1 - c_0 < |c_0|$, то

$$|c_0|^{\omega_1} \leqslant \frac{L_6}{\omega_1} g(c_1)^{\omega_1} \text{ или } |c_0| \leqslant L_7 g(c_1).$$

Таким образом, функция Z ограничена снизу.

Точно так же доказываем существование верхней границы функции Z.

3. Предположение 1 D теоремы оказывается излишним, если усилить предположение 1 A. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция Z класса A^2 в $\overline{D}$ удовлетворяет вариационному условию* (1). *Пусть:* 1) *коэффициенты* a, b, c, d, e, f *существенно ограничены в D постоянной L_1;* 2) $\iint\limits_D (r^2 + s^2 + t^2 + Z^2) \times \times dx\,dy \leqslant L_1$ *и* 3) *для любой замкнутой области, лежащей в D, выполняется условие* 1 C.

* Так как $Z(x, y)$ — функция абсолютно непрерывная в смысле Тонелли, то $g(c)$ — абсолютно непрерывная функция (2).

Тогда для каждой замкнутой области $\overline{D}_1 \subset D$ имеет место неравенство

$$\iint\limits_{D_1} (Z_x^2 + Z_y^2)\, dx\, dy \leqslant L,$$

где L зависит только от L_1 и от расстояния между границами областей D, D_1.

Для доказательства этого предложения преобразуем условие стационарности к полярным координатам с центром в фиксированной точке $(x_0, y_0) \in \overline{D}_1$. Так же, как у М. Шифмана ([3]), получаем «формулу Грина»:

$$\iint\limits_{C_r} \Big\{ \alpha Z_r^2 + 2\beta \frac{1}{r} Z_r Z_\theta + \gamma \frac{1}{r^2} Z_\theta^2 + 2\delta Z_r Z + 2\varepsilon Z_\theta Z + \mu Z^2 + \rho Z_r +$$

$$+ 6 \frac{1}{r} Z_\theta + \tau Z \Big\}\, r\, dr\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ \alpha Z_r + \beta \frac{1}{r} Z_\theta + \delta Z + \rho \Big\}\, r\, d\theta. \qquad (14)$$

Здесь C_r — круг с центром в точке (x_0, y_0), лежащий в области D. Пусть

$$\varphi(r) = \iint\limits_{C_r} \Big(\alpha Z_r^2 + 2\beta Z_r \frac{1}{r} Z_\theta + \gamma \frac{1}{r^2} Z_\theta^2\Big)\, r\, dr\, d\theta.$$

Из (14) следует

$$\int\limits_r^{r+r_0} \varphi(r)\, dr \leqslant L_3 \sqrt{\varphi(r + r_0) - \varphi(r)} + L_4, \quad C_{r+r_0} \subset D.$$

Отсюда нетрудно получить ограниченность интеграла $\varphi(r)$ для достаточно малого r, а следовательно, и утверждение теоремы.

Поступило
27 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1951. [2] А. С. Кронрод, Усп. матем. наук, 5, № 1 (1950). [3] M. Shiffmann, Ann. of Math., 48, No. 2 (1947).