Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

А. ПОСТНИКОВ

О НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВАХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 6 X 1951)

Р. О. Кузьмин ([1]) в 1927 г. дал элементарное доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Пусть $f(x)$ вещественна при $1 \leqslant x \leqslant N-1$ и $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ монотонна*; $\theta < \Delta f(x) < 1 - \theta$. *Тогда*

$$\left| \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)} \right| \leqslant \frac{1}{\theta}. \tag{1}$$

Следствия из этой теоремы имеют большое значение в вопросах распределения дробных долей функций ([2]) и в некоторых других вопросах теории чисел и доказывались с помощью математического анализа ([3]). Рассуждение Кузьмина по форме геометрическое; если его записать аналитически (и слегка упростить), то получится доказательство, опубликованное Герцогом и Пиранιан ([4]).

В настоящей работе я развиваю метод Кузьмина. Это позволяет получить ряд оценок тригонометрических сумм.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ на $[1, N]$ вещественна и* $|\Delta f(x) - \alpha| < \varepsilon$. *Тогда*

$$\left| \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)} \right| \leqslant \frac{1 + \pi\varepsilon (N-1)}{2(\alpha)}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть α не целое,

$$\left| (1 - e^{2\pi i \alpha}) \sum_{x=2}^{N} e^{2\pi i f(x)} \right| = \left| e^{2\pi i f(1)} - e^{2\pi i f(N)} + \sum_{x=2}^{N} \left(e^{2\pi i f(x)} - e^{2\pi l (f(x-1)+2)} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 + \sum_{x=2}^{N} \left| e^{2\pi i f(x)} - e^{2\pi i (f(x-1)+\alpha)} \right| \leqslant 2 + 2\pi \sum_{x=2}^{N} |\Delta f(x-1) - \alpha| <$$

$$< 2 + 2\pi\varepsilon (N-1). \tag{3}$$

Отсюда

$$\left| \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)} \right| \leqslant \frac{2 + 2\pi\varepsilon (N-1)}{2 \,|\sin \pi\alpha|},$$

и теорема сразу следует. Если α целое, оценка тривиально справедлива.

Теорема 1 позволяет упростить и сделать логически более прозрачным употребление метода Вейля для неполиномиальных сумм. Напишем преобразование Вейля (см., например, ([5])):

$$\left|\sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)}\right|^{2^{n-1}} \leqslant \tag{4}$$

$$\leqslant 2(P-1)^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1=-P+1}^{P-1} \cdots \sum_{y_{n-1}=-P_{n-2}+1}^{P_{n-2}-1} \left|\sum_{x_n=Q_{n+1}+1}^{Q_{n+1}+P_{n-1}} e^{2\pi i} \underset{x-1}{\Delta} \cdots \underset{y_1}{\Delta} f(x_n)\right|.$$

Пусть

$$\left|\underset{y_{n-1}}{\Delta} \cdots \underset{y_1}{\Delta} f(x_n+1) - \underset{y_{n-1}}{\Delta} \underset{y_1}{\Delta} f(x_n) - \alpha y_1 \cdots y_{n-1}\right| < \varepsilon.$$

Применим теорему 1:

$$|S|^{2^{n-1}} \leqslant (2P-1)^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1=-P+1}^{P-1} \cdots \sum_{y_{n-1}=-P_{n-2}+1}^{P_{n-2}} \min\left(P_{n-1}, \frac{1+\pi\varepsilon P_{n-1}}{2(\alpha y_1 \cdots y_{n-1})}\right). \tag{5}$$

Упрощая, получим:

$$|S|^{2^{n-1}} \leqslant 3^{2^{n-1}} (P^{2^{n-1}-1} + P^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1=1}^{P-1} \cdots \sum_{y_{n-1}=1}^{P-1} \min\left(P, \frac{1+\pi\varepsilon P}{2(\alpha y_1 \cdots y_{n-1})}\right). \tag{6}$$

Отсюда нетрудно доказать, например, что при $\frac{m-1}{v} < 1$

$$\left|\sum_{x=0}^{m-1} (x+v)^{ti}\right|^{2^{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant 3^{2^{n-1}} (m^{2^{n-1}} + m^{2^{n-1}-n} \sum_{y_1=1}^{m-1} \cdots \sum_{y_{n-1}=1}^{m-1} \min\left(m, \frac{1+2^{n-1}|t|\left(\frac{m-1}{v}\right)^{n+1}}{\frac{t}{2\pi n v^n} n! y_1 \cdots y_{n-1}}\right) \tag{7}$$

(ср. с утверждением теоремы ([6])).

Теорема 1 может быть обобщена на многомерный случай.

Теорема 2. *Пусть у функции $f(x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_n)$ конечные разности удовлетворяют неравенствам*

$$|\Delta_{x_i} f(x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_n) - \alpha_i| \leqslant \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{8}$$

(s может равняться n). Тогда

$$\left|\sum_{x_1=1}^{P_1} \cdots \sum_{x_n=1}^{P_n} e^{2\pi i f(x_1, \ldots, x_n)}\right| \leqslant P_{s+1} \cdots P_n \frac{1+\pi\varepsilon(P_1+1)\cdots(P_s+1)}{2^s(\alpha_1)\cdots(\alpha_s)}. \tag{9}$$

Доказательство проводится аналогично теореме 1.

Обобщим рассуждения Кузьмина на случай немонотонной $\Delta f(x)$.

Теорема 3. *Пусть $\theta < \Delta f(x) < 1-\theta$ и пусть в последовательности $\Delta f(1), \ldots, \Delta f(N-1)$ есть монотонная подпоследовательность длины l. Пусть $\varepsilon = \max|\Delta f(x) - \Delta f(y)|$.*

$$\left|\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant \frac{1+\pi\varepsilon(N-l-1)}{\theta}. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть в последовательности $\Delta f(1), \ldots, \Delta f(N-1)$ монотонная подпоследовательность будет $\Delta f(n_1), \ldots, \Delta f(n_l)$. Положим:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \Delta f(n_1), & x \leqslant n_1; \\ \Delta f(n_2), & n_1 < x \leqslant n_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta f(n_l), & n_{l-1} < x; \end{cases} \tag{11}$$

$$0 < \varphi(x) < 1 - \theta.$$

$$\left|\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)}\right| = \left|\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)} \frac{1 - e^{2\pi i f(x)}}{1 - e^{2\pi i \varphi(x)}}\right| =$$

$$= \left| \frac{e^{2\pi i f(1)}}{1 - e^{2\pi i \varphi(1)}} + \sum_{x=2}^{N} \left(\frac{e^{2\pi i f(x)}}{1 - e^{2\pi i \varphi(x)}} - \frac{e^{2\pi i (f(x-1) + \varphi(x-1))}}{1 - e^{2\pi i \varphi(x-1)}} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{2\pi i (f(N) + \varphi(N))}}{1 - e^{2\pi i \varphi(N)}} \right| \text{[redacted]} \frac{1}{2 \sin \pi\varphi(1)} + \sum_{x=2}^{N} \left| \frac{e^{2\pi i f(x)}}{1 - e^{2\pi i \varphi(x)}} - \frac{e^{2\pi i (f(x-1) + \varphi(x-1))}}{1 - e^{2\pi i \varphi(x-1)}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2 \sin \pi\varphi(x)} = \frac{1}{2 \sin \pi\varphi(1)} +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{x=2}^{N} \sqrt{(\operatorname{ctg} \pi\varphi(x) - \operatorname{ctg} \pi\varphi(x-1))^2 + 4 \frac{\sin \pi(\Delta f(x-1) - \varphi(x)) \sin \pi(\Delta f(x-1) - \varphi(x-1))}{\sin \pi\varphi(x) \cdot \sin \pi\varphi(x-1)}}$$

$$+ \frac{1}{2 \sin \pi\varphi(N)} \leqslant \frac{1}{2 \sin \pi\varphi(1)} + \frac{1}{2 \sin \pi\varphi(N)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{x=2}^{N} |\operatorname{ctg} \pi\varphi(x) - \operatorname{ctg} \pi\varphi(x-1)| +$$

$$+ \sum_{x=2}^{N} \sqrt{\left| \frac{\sin \pi(\Delta f(x-1) - \varphi(x)) \cdot \sin \pi(\Delta f(x-1) - \varphi(x-1))}{\sin \pi\varphi(x) \cdot \sin \pi\varphi(x-1)} \right|}. \tag{12}$$

Так как $0 < \varphi(x) < 1$ и $\varphi(x)$ монотонна, то $\operatorname{ctg} \pi\varphi(x)$ тоже изменяется монотонно, и поэтому в сумме $\sum\limits_{x=2}^{N} |\operatorname{ctg} \pi\varphi(x) - \operatorname{ctg} \pi\varphi(x-1)|$ мы можем опустить знак абсолютной величины, после чего члены в этой сумме начнут друг друга уничтожать:

$$\left|\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant \frac{1}{2 \sin \pi\varphi(1)} + \frac{1}{2 \sin \pi\varphi(N)} + \frac{1}{2} |\operatorname{ctg} \pi\varphi(N) - \operatorname{ctg} \pi\varphi(1)| +$$

$$+ \sum_{x=2}^{N} \pi \sqrt{\frac{|\Delta f(x-1) - \varphi(x)|\, |\Delta f(x-1) - \varphi(x-1)|}{\sin \pi\varphi(x) \cdot \sin \pi\varphi(x-1)}}. \tag{12'}$$

Когда $x - 1 = n_i$, $\Delta f(x-1) - \varphi(x-1) = 0$. В остальных случаях мы пишем: $|\Delta f(x-1) - \varphi(x)|\, |\Delta f(x-1) - \varphi(x-1)| \leqslant \varepsilon^2$. Замечая, что $\sin \pi\varphi(x) > 2\theta$, получим, что

$$\left|\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant \frac{1 + \pi\varepsilon(N - l - 1)}{\theta}. \tag{13}$$

Оценка имеет содержание, если $\varepsilon(N-l-1)$ по порядку меньше N, т. е. когда последовательность почти монотонная.

Докажем предложение, обобщающее теорему 1. Оно показывает, что поведение суммы $|\Sigma e^{2\pi i f(x)}|$ зависит от аппроксимации последовательности $\Delta f(1), \ldots, \Delta f(N-1)$ монотонной последовательностью.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x)$ — *монотонная функция, заключенная в тех же пределах, что и* $\Delta f(x)$, *т. е.* $\theta < \varphi(x) < 1-\theta$, *и такая, что* $|\Delta f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. *Тогда*

$$\left|\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)}\right| \text{[redacted]} \frac{1+\pi\varepsilon(N-1)}{\theta}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ функция такая, что $\Delta\Phi(x) = \varphi(x)$, $\sum\limits_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)} = \sum\limits_{x=1}^{N} e^{2\pi i (f(x)-\Phi(x))} e^{2\pi i \Phi(x)}$. Применим абелево преобразование

$$\left|\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant \max_{1 < j \leqslant N} \left|\sum_{x=1}^{j} e^{2\pi i \Phi(x)}\right| \left(1 + \pi \sum_{j=1}^{N-1} |\Delta f(x) - \varphi(x)|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant j < N} \left|\sum_{x=0}^{j} e^{2\pi i \Phi(x)}\right| (1 + \pi(N-1)\varepsilon). \tag{15}$$

К тригонометрической сумме применяем оценку (1)

$$\left|\sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant \frac{1+\pi(N-1)\varepsilon}{\theta},$$

что и требовалось доказать.

Поступило
16 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. О. Кузьмин, Журн. Ленинградск. физ.-мат. об-ва, 1, 2, 233 (1927). [2] И. М. Виноградов, там же, 1, 56 (1926). [3] И. М. Виноградов, Изв. Ленинградск. политехнич. ин-та, 30, 31 (1927). [4] F. Herzog and G. Piranian, Duke Math. Journ., 16, № 3, 529 (1949). [5] Б. И. Сегал, Усп. матем. наук, 1, в. 3—4, 169 (1946). [6] E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2, 1927, S. 32.