Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и Я. Б. РУТИЦКИЙ

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 IX 1951)

Применение общих методов и теорем нелинейного функционального анализа к изучению конкретных классов нелинейных операторов проводится при помощи различных конкретных банаховых пространств. Как оказывается, изучение многих операторов с существенно неполиномиальными нелинейностями не может быть проведено при помощи обычно применяемых пространств (C, L_p и т. д.). Например, изучение интегрального оператора

$$Au(x) = \int K(x, y) f[y, u(y)]\, dy,$$

где $f(x, u)$ — функция, возрастающая по u быстрее любой степени u, а $K(x, y)$ — неограниченное ядро, ни в каком пространстве L_p проведено быть не может, так как не для всех $u(x) \in L_p$ функции $f[x, u(x)]$ суммируемы.

Изучение различных нелинейных существенно неполиномиальных операторов удобно проводить при помощи пространств Орлича L^*_Φ ([1–3]).

Напомним относящиеся сюда определения.

Непрерывная выпуклая функция $\Phi(u)$ $(-\infty < u < \infty)$ называется N'-функцией, если:

α) $\Phi(0) = 0, \quad \Phi(-u) = \Phi(u) > 0$ для $u \neq 0$;

β) $\lim\limits_{|u| \to 0} \dfrac{\Phi(u)}{|u|} = 0, \quad \lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{\Phi(u)}{u} = \infty$.

Как показали Бирнбаум и Орлич ([4]), всякая N'-функция может быть однозначным образом представлена в виде

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} p(t)\, dt, \tag{1}$$

где $p(t)$ — неубывающая, непрерывная справа функция, удовлетворяющая условиям

1) $p(t) > 0$ для $t > 0$; 2) $\lim\limits_{t \to 0} p(t) = 0$; 3) $\lim\limits_{t \to \infty} p(t) = \infty$.

И обратно, всякая функция вида (1), где $p(t)$ удовлетворяет условиям 1) — 3), есть N'-функция.

Если через $q(s)$ обозначить функцию, определенную равенством

$$q(s) = \sup_{p(t) \leqslant s} t,$$

то, как легко убедиться, функция $q(s)$ есть также неубывающая, непрерывная справа функция, удовлетворяющая условиям 1) — 3). Поэтому функция

$$\Psi(v) = \int_0^{|v|} q(s)\, ds$$

будет также N'-функцией. Эта функция называется дополнительной к N'-функции $\Phi(u)$.

Пусть G — замкнутое ограниченное множество n-мерного евклидова пространства. Обозначим через L_Φ^* множество измеримых функций $u(x)$, для которых

$$\int_G u(x)\, v(x)\, dx < \infty,$$

если $\int_G \Psi[v(x)]\, dx < \infty$. Это множество обращается в банахово пространство, если ввести норму равенством

$$\| u \|_\Phi = \sup \left| \int_G u(x)\, v(x)\, dx \right|,$$

где sup распространен на все такие функции $v(x)$, для которых $\int_G \Psi[v(x)]\, dx \leqslant 1$. Пространства L_p функций, суммируемых с p-й степенью, являются частным случаем пространств Орлича при $\Phi(u) = |u|^p / p$.

Теория таких пространств разрабатывалась ([1,5]) для случая, когда функция $\Phi(u)$ удовлетворяет так называемому Δ_2-условию:

$$\overline{\lim} \frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)} = K < \infty.$$

Так как при этом условии функция $\Phi(u)$ растет не быстрее, чем u^p*, где $p = \log_2 K$, то такие пространства (по сравнению с L_p) не позволяют существенно расширить класс исследуемых нелинейных операторов.

В настоящей заметке мы излагаем некоторые предложения, относящиеся к теории пространств L_Φ^*, для случая, когда функция $\Phi(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию.

1. Дадим примеры N'-функций $\Phi(u)$, не удовлетворяющих Δ_2-условию. Пространства L_Φ^*, определенные такими функциями, позволяют исследовать некоторые нелинейные операторы с «сильными» нелинейностями.

В качестве первого примера рассмотрим N'-функцию

$$\Phi(u) = e^{\alpha |u|} - \alpha |u| - 1 \quad (\alpha > 0).$$

Дополнительной к ней будет функция

$$\Psi(v) = \left(1 - \frac{|v|}{\alpha}\right) \ln \left(1 - \frac{|v|}{\alpha}\right) - \frac{|v|}{\alpha}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $\Psi(v)$ удовлетворяет Δ_2-условию.

В качестве второго примера рассмотрим функцию

$$\Phi(u) = e^{|u|^\alpha} - 1 \quad (\alpha > 1).$$

* Это замечание принадлежит Е. Г. Шилову.

Эта функция также является N'-функцией. Дополнительную к ней функцию $\Psi(v)$ написать в явном виде не удается, и поэтому невозможно непосредственной проверкой узнать, удовлетворяет ли функция $\Psi(v)$ Δ_2-условию.

В приложениях существенную роль играют такие пространства L^*_Φ, что функция $\Psi(v)$, дополнительная к $\Phi(u)$, удовлетворяет Δ_2-условию. Поэтому нужно уметь определять, удовлетворяет ли функция $\Psi(v)$ Δ_2-условию непосредственно по функции $\Phi(u)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы дополнительная к N'-функции $\Phi(u)$ функция $\Psi(v)$ удовлетворяла Δ_2-условию, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие постоянные u_0 и $l > 1$, что при $u \geqslant u_0$ выполняется неравенство*

$$\Phi(u) \leqslant \frac{1}{2l}\Phi(lu).$$

Пользуясь этой теоремой, легко убеждаемся, что функция $\Psi(v)$, дополнительная к N'-функции $\Phi(u) = e^{|u|^\alpha} - 1$, удовлетворяет Δ_2-условию.

В связи с приведенными примерами возникает следующий вопрос: не удовлетворяет ли всегда Δ_2-условию по крайней мере одна из двух дополнительных друг к другу функций $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$. Приводимый ниже пример показывает, что это не так.

Пример. Функцию $\Phi(u)$ построим, задав ее правую производную $p(t)$ $(t \geqslant 0)$ равенством: $p(t) = t$, когда $t \in [0, 1)$; $p(t) = n!$, когда $t \in [(n-1)!, n!)$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Тогда, как легко проверить, в точках $u_n = n!$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будут иметь место неравенства $\Phi(2u_n) > n\Phi(u_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что показывает, что функция $\Phi(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию.

Функция $q(s)$ в данном примере определится равенством: $q(s) = s$, когда $s \in [0, 1)$; $q(s) = (n-1)!$, когда $s \in [(n-1)!, n!)$, причем в точках $v_n = n!$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будут выполняться неравенства $\Psi(2v_n) > n\Psi(v_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. и функция $\Psi(v)$ не удовлетворяет Δ_2-условию.

В этом примере функция $\Phi(u) = \int\limits_0^{|u|} p(t)\,dt$ растет не быстрее степенной. Это показывает, что замечание о том, что функция $\Phi(u)$, удовлетворяющая Δ_2-условию, растет не быстрее некоторой степени u, необратимо: существуют функции $\Phi(u)$, не удовлетворяющие Δ_2-условию и растущие не быстрее некоторой степени u.

2. Как показал Орлич [1], пространство L^*_Φ в случае, когда функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, сепарабельно и совпадает с множеством L_Φ функций, для которых $\int\limits_G \Phi[u(x)]\,dx < \infty$.

Для случая, когда Δ_2-условие не выполняется, L_Φ включено в L^*_Φ, но не совпадает с ним. Неизвестно, будет ли в этом случае пространство L^*_Φ сепарабельно. Приводимая ниже теорема дает основание предполагать, что L^*_Φ в этом случае не сепарабельно.

Теорема 2. *Пусть $\Phi(u)$ — N'-функция, не удовлетворяющая Δ_2-условию. Тогда множество ограниченных функций нигде не плотно в пространстве L^*_Φ.*

3. Рассмотрим вопрос о соотношении классов функций L^*_Φ и $L^*_{\Phi_1}$, определенных различными N'-функциями $\Phi(u)$ и $\Phi_1(u)$.

Теорема 3. *Пусть $\Phi(u)$ и $\Phi_1(u)$ — две N'-функции. Для того чтобы*

$$L^*_{\Phi_1} \subseteq L^*_\Phi,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали такие постоянные u_0 и s, что при $u \geqslant u_0$

$$\Phi(u) \leqslant \Phi_1(su).$$

Следствие. *Для того чтобы*

$$L_{\Phi}^{*} = L_{\Phi_1}^{*},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали такие постоянные s, l и u_0, что при $u \geqslant u_0$

$$\Phi_1(lu) \leqslant \Phi(u) \leqslant \Phi_1(su).$$

В силу этого для функций $\Phi(u)$ и $\Phi_1(u) = \Phi(ku)$ $(k > 0)$ имеет место $L_{\Phi}^{*} = L_{\Phi_1}^{*}$, хотя в случае, когда функция $\Phi(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, классы L_{Φ} и L_{Φ_1} не совпадают. Заметим еще, что нормы одной и той же функции $u(x)$ в пространствах L_{Φ}^{*} и $L_{\Phi_1}^{*}$ связаны соотношением $\|u\|_{\Phi_1} = k\|u\|_{\Phi}$.

4. Будем говорить, что последовательность $u_n(x) \in L_{\Phi}^{*}$ $(n = 1, 2\ldots)$ слабо сходится, если последовательность чисел

$$\int_G u_n(x)\, v(x)\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится при любой функции $v(x) \in L_{\Psi}^{*}$. Так как, вообще говоря, пространство L_{Ψ}^{*} является частью пространства, сопряженного к L_{Φ}^{*}, то это определение слабой сходимости отличается от обычного [2]. Как показывают приводимые ниже теоремы, в случае, когда дополнительная к $\Phi(u)$ функция $\Psi(v)$ удовлетворяет Δ_2-условию (а это имеет место в интересующих нас случаях), такое определение слабой сходимости имеет смысл.

Теорема 4. *Если последовательность функций $u_n(x) \in L_{\Phi}^{*}$ слабо сходится, то последовательность норм $\|u_n\|_{\Phi}$ ограничена.*

Будем говорить, что пространство L_{Φ}^{*} слабо компактно, если из любой ограниченной последовательности функций $u_n(x) \in L_{\Phi}^{*}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

Будем также говорить, что пространство L_{Φ}^{*} слабо полно, если из того, что последовательность $u_n(x) \in L_{\Phi}^{*}$ слабо сходится, следует, что существует функция $u_0(x) \in L_{\Phi}^{*}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_G u_n(x)\, v(x)\, dx = \int_G u_0(x)\, v(x)\, dx$ для любой функции $v(x) \in L_{\Psi}^{*}$.

Теорема 5. *Если дополнительная к N'-функции $\Phi(u)$ функция $\Psi(v)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то пространство L_{Φ}^{*} слабо компактно и слабо полно.*

Поступило
25 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Orlicz, Bull. international de l'Acad. Pol., ser. A., Cracovie (1932). [2] С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. [3] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939. [4] Z. W. Birnbaum u. W. Orlicz, Stud. Math., 3, 1 (1931). [5] A. C. Zaanen, Ann. of Math., 47, 654 (1946).