Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

К ТЕОРИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ Б. М. ЛЕВИТАНА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 IX 1951)

Б. М. Левитаном в ряде работ ([1-3]) было введено понятие почти периодической последовательности относительно сдвига, задаваемого кубической матрицей, и подробно исследованы такие последовательности, связанные с решениями штурм-лиувиллевских уравнений и ортогональными полиномами относительно веса $h(t)\,(1-t^2)^{-1/2}$, где $h(t)>0$ $(-1\leqslant t\leqslant 1)$ и удовлетворяет условию Липшица. В этой заметке рассматриваются почти периодические последовательности относительно «сдвига» в гиперкомплексной системе с дискретным базисом. Полученные общие утверждения в применении к конкретным гиперкомплексным системам обобщают и усиливают некоторые теоремы Б. М. Левитана. В дальнейшем мы всюду опираемся на понятия и некоторые результаты заметки ([4]).

1°. Пусть имеется нормальная гиперкомплексная система (г. с.) Λ с дискретным базисом $T=\{j, k, l, \ldots\}$ и базисной единицей. Ограниченную последовательность f_j $(j\in T)$ будем называть почти периодической (п. п.), если семейство

$$(D_k f)_l=\frac{1}{\mu_k\mu_l}\sum_j f_j\mu_j C_{jkl}$$

(k — параметр, l — переменное; $k, l\in T$) компактно относительно равномерной по l сходимости. Очевидно, каждый характер $\mathfrak{t}$ г. с. Λ является п. п. последовательностью; нашей целью будет доказательство того, что при некоторых предположениях линейные комбинации характеров в известном смысле исчерпывают все п. п. последовательности.

Введем понятие среднего, являющееся обобщением понятия предела Банаха на г. с.: однородный аддитивный положительный функционал M, определенный на пространстве E всех ограниченных последовательностей ξ_j $(j\in T)$, будем называть средним, если: 1) $\underset{l}{M}[|(D_k\xi)_l|]\leqslant\underset{l}{M}[|\xi_l|]$ $(\xi\in E,\ k\in T)$, 2) $\underset{l}{M}[\xi_l]=\lim\limits_{l\to\infty}\xi_l$ $(\xi\in E)$, если последний предел существует. Нетрудно видеть, что без ограничения общности можно считать, что $\underset{j}{M}[\xi_j]=\underset{j}{M}[\xi_{j^*}]$ $(\xi\in E)$.

Для г. с. с неотрицательными структурными константами C_{jkl}, для которых $\mathfrak{t}_j=1$ $(j\in T)$ является характером (такими г. с. будут, например, все двойственные г. с. к г. с. с компактным базисом), при помощи одной теоремы М. Г. Крейна ([5]) можно доказать существование среднего, удовлетворяющего даже более сильному, чем 1), 2), соотношению: 1′) $\underset{l}{M}[(D_k\xi)_l]=\underset{l}{M}[\xi_l]$ $(\xi\in E,\ k\in T)$. При неположительных же C_{jkl} во многих случаях среднее удается эффективно построить. Отметим, что если вместо 1), 2) выполняется 1′), то среднее единственно на п. п. последовательностях.

2°. Пусть Λ — групповое кольцо коммутативной дискретной группы; в этом случае среднее M удовлетворяет более сильному, чем 1′), условию:

$$\underset{k}{M}\left[(D_k\xi)_l\,\eta_k\right] = \underset{k}{M}\left[\xi_k\,(D_k\eta)_l\right] \quad (\xi,\ \eta \in E;\ l \in T). \tag{1}$$

Но в общем случае существует г. с. с единственным на п. п. последовательностях средним, для которого (1) не имеет места. В дальнейшем мы будем предполагать, что среднее дополнительно удовлетворяет условию (1), такое среднее будем называть симметричным.

Введем в линейное множество B всех п. п. последовательностей скалярное произведение, полагая $(f, g) = \underset{j}{M}[f_j, \overline{g}_j]$ $(f, g \in B)$; отметим, что в отличие от случая группы (f, f) может, вообще говоря, обращаться в нуль при $f_j \not\equiv 0$ («вырожденность» среднего). Нетрудно проверить, что характеры г. с. $\mathfrak{t}_j$ удовлетворяют соотношению ортогональности: $(\mathfrak{t}', \mathfrak{t}'') = 0$ при $\mathfrak{t}'_j \not\equiv \mathfrak{t}''_j$, причем каждый характер $\mathfrak{t}$, для которого $(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}) > 0$, эрмитов.

При помощи некоторой модификации известного метода Г. Вейля для п. п. последовательностей относительно г. с. с симметричным средним может быть доказано равенство Парсеваля в следующей форме*:

Теорема 1. *Для любых двух п. п. последовательностей f и g имеет место почти везде** равенство*

$$\underset{k}{M}\left[(D_k f)_l g_k\right] = \sum_{\mathfrak{t}} \frac{(f, \mathfrak{t})\ (g, \mathfrak{t})}{(\mathfrak{t}, \mathfrak{t})}\, \mathfrak{t}_l, \tag{2}$$

где суммирование распространено на не более чем счетное число характеров г. с. Λ.

3°. В согласии со сказанным выше будем называть среднее M невырожденным, если $M[|f|^2] > 0$ для каждой п. п. последовательности $f_j \not\equiv 0$. Для дальнейшего развития теории фундаментальную роль играет установление невырожденности.

Теорема 2. *Для того чтобы симметричное среднее было невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой п. п. последовательности $f \not\equiv 0$ существовало число $h > 0$ (зависящее только от f) такое, что каково бы ни было $T' \subset T$, $m(T') = 1$, нашлась бы пара точек $j \in T$, $k \in T'$, для которых $|(D_j f)_k| \geqslant h$.*

Замечание. Эта теорема допускает уточнение, именно, если для некоторой п. п. последовательности f выполняются условия теоремы, то $M[|f|^2] > 0$.

Для г. с. с невырожденным симметричным средним равенство Парсеваля принимает классическую форму, а теорема об аппроксимации при помощи обычных рассуждений может быть доказана в следующем виде:

Теорема 3. *Если среднее симметрично и невырождено, то для любой п. п. последовательности f и любого $\varepsilon > 0$ можно найти линейную комбинацию $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \mathfrak{t}^\alpha$ характеров г. с. Λ и точку $a_\varepsilon \in T$ такие, что равномерно по $j \in T$ $\left|(D_{a_\varepsilon} f)_j - \sum\limits_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \mathfrak{t}_j^\alpha\right| < \varepsilon$.*

---

* На возможность доказательства равенства Парсеваля при помощи метода Г. Вейля было указано Б. М. Левитаном в ([1]).

** Относительно конечно аддитивной меры $m(E) = M[\varkappa_E]$ $(E \subset T)$, где $\varkappa_E$ — характеристическая функция множества E, отметим, что $m(T) = 1$, так как $M[1] = 1$.

На г. с. с невырожденным симметричным средним может быть также обобщено известное утверждение о том, что интеграл Фурье — Стильтьеса является п. п. функцией тогда и только тогда, когда мера сосредоточена на не более чем счетном множестве точек.

Рассмотрим некоторые примеры п. п. последовательностей.

4°. Пусть $G=\{j, k, l, \ldots\}$ — дискретная коммутативная группа; совокупность четных ($x_j = x_{-j}$, $j \in G$) последовательностей на G, для которых $\sum_j |x_j| < \infty$, образует нормальную г. с. $H(G)$, базисом которой служат классы $\{j, -j\}$ ($j \in G$), отображением $*$ в базисе является тождественное преобразование, а базисной единицей служит нуль группы. П. п. последовательностями относительно г. с. $H(G)$ будут четные последовательности f_j ($j \in G$), для которых семейство $^1/_2[f_{l-k} + f_{l+k}]$ компактно, а средним M, причем симметричным — обычное среднее на п. п. функциях на группе G.

Обозначим через F подгруппу группы G, состоящую из элементов вида $j+j$ ($j \in G$).

Лемма. *Если фактор-группа G/F конечна, то среднее M невырождено.*

Доказательство. Обозначим через $G_1, \ldots, G_p$ классы смежности G по F, каждый G_q состоит из элементов l вида $l = r + r + s_q$, где $s_1, \ldots, s_p$ — фиксированный набор элементов из G. Для доказательства леммы предположим противное: пусть существует п. п. последовательность $f_j \not\equiv 0$ такая, что $\underset{j}{M}[|f_j|^2] = 0$. Тогда (см. теорему 2 и замечание к ней) для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдется $T_n \subset G$ такое, что $m(T_n) = 1$ и $\frac{1}{2}|f_{j-k} + f_{j+k}| < \frac{1}{n}$ ($j \in G$, $k \in T_n$). Фиксируя здесь $k \in T_n$ и полагая $j = k + l$ ($l = r + r + s_q \in G$), $g_a^{(q)} = f_{a+a+s_q}$, получим, что для всех $k \in T_n$ справедливо неравенство $|f_l + g_{r+k}^{(q)}| < \frac{2}{n}$ ($l \in G$). Отсюда, учитывая, что $m(T_n) = 1$, получим

$$|f_l + \underset{k}{M}[g_k^{(q)}]| = |f_l + \underset{k}{M}[g_{r+k}^{(q)}]| = |\underset{k}{M}[f_l + g_{r+k}^{(q)}]| \leqslant$$

$$\leqslant \underset{k}{M}[|f_l + g_{r+k}^{(q)}|] < \frac{2}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е. при $l \in G_q$ ($q = 1, \ldots, p$) f_l равно постоянной $\alpha_p = -\underset{k}{M}[g_k^{(q)}]$. Так как $f_l \not\equiv 0$, то по крайней мере для одного q_0 $\alpha_{q_0} \neq 0$; с другой стороны, множества $G_1, \ldots, G_p$ непересекающиеся, $G_1 \cup \ldots \cup G_p = G$ и получаются друг из друга посредством сдвига, поэтому $m(G_1) = \ldots$ $\ldots = m(G_p) = \frac{1}{p}$. Следовательно, $\underset{j}{M}[|f_j|^2] \geqslant \frac{1}{p}|\alpha_{q_0}|^2 > 0$, что абсурдно. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть G/F конечна*; для того чтобы некоторая четная последовательность f_j ($j \in G$) была п. п. функцией на группе G, необходимо и достаточно, чтобы семейство последовательностей $^1/_2[f_{l-k} + f_{l+k}]$ ($l, k \in G$) было компактным относительно равномерной сходимости.*

В доказательстве нуждается только достаточность. Применяя лемму и теорему 3 и замечая, что каждый характер г. с. $H(G)$ имеет вид $\mathrm{t}_j = {}^1/_2[\chi(j) + \overline{\chi(j)}]$, где $\chi(j)$ — характер группы G, заключаем, что по данному $\varepsilon > 0$ можно найти точку $b_\varepsilon = a_{\varepsilon/2} \in G$ и линейную комбинацию P_j конечного числа характеров группы G такие, что

---

* Это будет, например, тогда, когда G — целочисленная решетка векторной группы.

$$\left|\frac{1}{2}[f_{j-b_\varepsilon}+f_{j+b_\varepsilon}]-P_j\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad (j\in G). \tag{3}$$

С другой стороны, из равенства $^1/_2\,[f_{j+l-b_\varepsilon}-f_{j+l+b_\varepsilon}]={}^1/_2\,[f_{(j-b_\varepsilon)-l}+f_{(j-b_\varepsilon)+l}]-{}^1/_2\,[f_{j-(b_\varepsilon+l)}+f_{j+(b_\varepsilon+l)}]$ вытекает, что $\varphi_j={}^1/_2\,[f_{j-b_\varepsilon}-f_{j+b_\varepsilon}]$ является п. п. функцией на группе G; поэтому в силу классической аппроксимационной теоремы найдется линейная комбинация Q_j характеров группы G такая, что

$$\left|\frac{1}{2}[f_{j-b_\varepsilon}-f_{j+b_\varepsilon}]-Q_j\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad (j\in G). \tag{4}$$

Из неравенств (3) и (4) вытекает утверждение.

Для случая группы целых чисел эта теорема была доказана Б. М. Левитаном ([1,3]) (см. также ([6])) при помощи весьма непростых рассуждений, использующих специфику числовой оси. Наше доказательство, хотя и не является элементарным, но, как нам кажется, выясняет сущность вопроса.

5°. Рассмотрим п. п. последовательности относительно г. с. Λ, построенной по полиномам $\{T_j^{(h)}(t)\}$, ортонормированным относительно веса $h(t)(1-t^2)^{-1/2}$ $(-1\leqslant t\leqslant 1)$, где $h(t)$ — положительная функция, имеющая ограниченную вторую производную (см. ([4]), n° 6°). Доказательство теоремы аппроксимации и равенства Парсеваля в этом случае проще всего провести при помощи метода Б. М. Левитана ([2]) «замены базиса». При этом существенным образом нужно опираться на теорему 3 ([4]), утверждающую непрерывность операторов преобразования для рассматриваемых полиномов. Получим следующие теоремы:

Теорема 5. *Для того чтобы ограниченную последовательность* f_j $(j=0,1,\ldots)$ *можно было равномерно аппроксимировать линейной комбинацией* $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} C_\alpha T_j^{(h)}(t^{(\alpha)})$ $(-1\leqslant t^{(\alpha)}\leqslant 1)$, *необходимо и достаточно, чтобы семейство* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j\int\limits_{-1}^{1} T_j^{(h)}(t)\,T_k^{(h)}(t)\,T_l^{(h)}(t)\,h(t)\,(1-t^2)^{-1/2}\,dt$ $(k,l=0,1,\ldots)$ *было компактным (т. е. чтобы* f *была п. п. относительно г. с.* Λ).

Теорема 6. *Для каждой п. п. относительно* Λ *последовательности* f *существует последовательность* $t^{(1)}, t^{(2)},\ldots$ *точек сегмента* $[-1,1]$ *такая, что*

$$\operatorname*{Lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}|f_j|^2=\frac{\pi}{2}\sum_{\alpha=1}^{\infty}h(t^{(\alpha)})\,|(f,t^{(\alpha)})|^2,$$

$$(f,t^{(\alpha)})=\operatorname*{Lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}f_jT_j^{(h)}(t^{(\alpha)}),$$

где Lim — *предел Банаха.*

Утверждения этого пункта уточняют результаты Б. М. Левитана ([1]), рассмотревшего более общий случай, когда $h(t)>0$ $(-1\leqslant t\leqslant 1)$ лишь удовлетворяет условию Липшица, и получившего для соответствующих п. п. последовательностей равенство Парсеваля в форме (2).

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
28 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Матем. сборн., **16** (58): 3, **17** (59): 1 (1945). [2] Б. М. Левитан, ДАН, **58**, № 6 (1947). [3] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, **4**, 1 (29) (1949). [4] Ю. М. Березанский, ДАН, **81**, № 3 (1951). [5] М. Г. Крейн и М. А. Рутман, Усп. матем. наук, **3**, 1 (23), 30 (1948). [6] В. А. Марченко, Зап. Ин-та матем. и мех. ХГУ и Харьковск. матем. об-ва, **20**, сер. 4, 33 (1950).