

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. А. ЖЕЛЕЗЦОВ и Л. В. РОДЫГИН

К ТЕОРИИ СИММЕТРИЧНОГО МУЛЬТИВИБРАТОРА

(Представлено академиком А. А. Андроновым 24 IX 1951)

В настоящей заметке дается на примере симметричного мультивибратора (рис. 1) способ рассмотрения разрывных колебаний на фазовой плоскости, в котором законы скачков напряжений получаются из приближенного рассмотрения поведения траекторий в четырехмерном фазовом пространстве, отображающем состояния мультивибратора при учете малых паразитных емкостей  $C_a$  и  $C_g$ . Этот способ дает существенное уточнение «гипотезы скачка», использованной в работах (1-4). Аналогичное рассмотрение разрывных колебаний может быть сделано и для других ламповых схем (например (5-7)).

1. Пренебрегая анодной реакцией и сеточными токами, но учитывая из паразитных параметров емкости  $C_a$  и  $C_g$ , мы получим (в обозначениях рис. 1) уравнения колебаний симметричного мультивибратора:

$$\begin{aligned} C \frac{du_1}{dt} &= C_g \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1 - E_g}{R_g}; & \frac{E_a - (u_1 + v_1)}{R_a} &= i_a(v_2) + C \frac{dv_1}{dt} + C_a \frac{d(u_1 + v_1)}{dt}, \\ C \frac{du_2}{dt} &= C_g \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2 - E_g}{R_g}; & \frac{E_a - (u_2 - v_2)}{R_a} &= i_a(v_1) + C \frac{dv_2}{dt} + C_a \frac{d(u_2 + v_2)}{dt}. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем для приведения к безразмерным переменным некоторый масштаб напряжений  $v_0$  и возьмем в качестве безразмерных переменных переменные  $x_1, x_2, y_1, y_2$  и  $t'$ , связанные со старыми переменными  $v_1, v_2, u_1, u_2$  и  $t$  соотношениями:

$$\begin{aligned} v_1 &= E_g + v_0 x_1; & u_1 &= E_a - R_a i_a(E_g) - E_g + \\ & + v_0 \left\{ \frac{C_g}{C} x_1 + \left[ 1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g} \left( 1 + \frac{C_a}{C} \right) \right] y_1 \right\}^*, & (2) \\ v_2 &= E_g + v_0 x_2; & u_2 &= E_a - R_a i_a(E_g) - E_g + v_0 \left\{ \frac{C_g}{C} x_2 + \right. \\ & + \left. \left[ 1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g} \left( 1 + \frac{C_a}{C} \right) \right] y_2 \right\}, & t' &= \frac{t}{R_a(C + C_a) + R_g(C + C_g)}. \end{aligned}$$

Обозначая дифференцирование по  $t'$  точкой сверху, мы приведем уравнения (1) к виду:

$$\dot{y}_1 = x_1; \quad \lambda \dot{x}_1 = -x_1 - y_1 - K\varphi(x_2), \quad \dot{y}_2 = x_2; \quad \lambda \dot{x}_2 = -x_2 - y_2 - K\varphi(x_1), \quad (3)$$

где  $\varphi(x) = \frac{1}{v_0 S} \{ i_a(E_g + v_0 x) - i_a(E_g) \}$  приведенная характеристика ламп ( $S$  — максимальная крутизна характеристики),

\* При  $C_a, C_g = 0$   $u_1$  и  $u_2$  являются с точностью до масштаба переменными составляющими напряжений  $u_1$  и  $u_2$  на конденсаторах  $C$ .

$$\lambda = \frac{R_a}{R_g} \frac{\frac{C_g}{C} + \frac{C_a}{C} + \frac{C_g C_a}{C}}{\left[1 + \frac{C_g}{C} + \frac{R_a}{R_g} \left(1 + \frac{C_a}{C}\right)\right]^2} > 0, \quad K = \frac{S R_a R_g}{R_a \left(1 + \frac{C_a}{C}\right) + R_g \left(1 + \frac{C_g}{C}\right)} \quad (4)$$

(при  $C_a, C_g \rightarrow 0$   $\lambda \rightarrow 0$  и  $K \rightarrow k = \frac{S R_a R_g}{R_a + R_g}$ ).

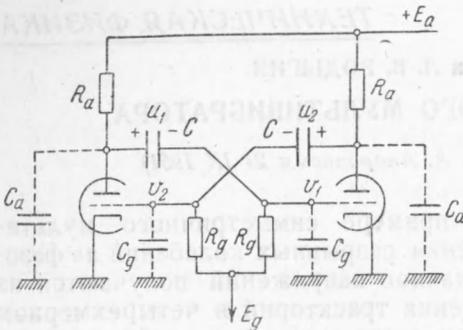


Рис. 1

2. Рассмотрим разбиение четырехмерного фазового пространства  $x_1, x_2, y_1, y_2$  на фазовые траектории при достаточно малых  $\lambda$  (т. е. малых  $C_a, C_g$ )\*. Выделим в этом четырехмерном пространстве поверхность (A):

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 + k\varphi(x_2) &= 0; \\ x_2 + y_2 + k\varphi(x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

(она, очевидно, гомеоморфна координатной плоскости  $x_1, x_2$ ).

В каждой точке четырехмерного фазового пространства  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$  вне этой поверхности при  $\lambda \rightarrow 0$   $\dot{y}_1, \dot{y}_2$  остаются конечными, а  $x_1, x_2 \rightarrow \infty$ , поэтому в пределе при  $\lambda \rightarrow 0$  все фазовое пространство вне поверхности (A) заполнено фазовыми траекториями, лежащими в плоскостях  $y_1, y_2 = \text{const}$ . По этим траекториям изображающая точка двигается «скачком» (со сколь угодно большой фазовой скоростью при достаточно малых  $\lambda$ )\*\*.

Для достаточно малых  $\lambda$  приближенные (асимптотические) дифференциальные уравнения фазовых траекторий «скачков», лежащих вблизи некоторой плоскости  $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0$  ( $y_1^0, y_2^0 = \text{const}$ ), получаются из последних двух уравнений системы (3) заменой  $y_1, y_2$  на постоянные  $y_1^0, y_2^0$  и  $K$  на  $k$ :

$$\lambda \dot{x}_1 = -x_1 - y_1^0 - k\varphi(x_2), \quad \lambda \dot{x}_2 = -x_2 - y_2^0 - k\varphi(x_1)***. \quad (6)$$

Рассмотрим разбиение на фазовые траектории, даваемое уравнениями (6), плоскости  $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0$ . Так как, согласно критерию Бендиксона, уравнения (6) не имеют замкнутых фазовых траекторий, то ход фазовых траекторий определяется равновесными состояниями и их сепаратрисами. Равновесными состояниями являются точки пересечения плоскости  $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0$  с поверхностью (A), при этом точка пересечения  $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)$  — устойчивый узел, если

$$k^2 \varphi'(x_1^0) \varphi'(x_2^0) - 1 < 0, \quad (7)$$

\* Будем рассматривать последовательность значений параметра  $\lambda > 0$ , стремящуюся к нулю, и соответствующую предельную картину поведения фазовых траекторий в четырехмерном фазовом пространстве;  $\lambda = 0$  из рассмотрения исключается, поскольку в этом случае бессмысленно представление фазового пространства мультивибратора как четырехмерного.

\*\* Тем самым при скачках (в пределе для  $\lambda \rightarrow 0$ ) напряжения на конденсаторах  $C$  ( $u_1$  и  $u_2$ ) остаются неизменными.

\*\*\* Эти уравнения могут быть использованы для приближенного расчета длительности «скачков» при малых  $\lambda$  (при малых  $C_a$  и  $C_g$ ). Они, конечно, справедливы только вне малых окрестностей точек пересечения плоскости  $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0$  и поверхности (A), а их решения аппроксимируют (при малых  $\lambda$ ) решения точной системы уравнений только на протяжении конечных интервалов времени.

и седло, если

$$k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 > 0. \quad (8)$$

Проведем на поверхности (A) кривую ( $\gamma$ ), на которой  $k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1$  меняет знак. Она существует при  $k > 1$ , является замкнутой кривой и делит поверхность (A) на две части: на ( $A_1$ ) — вне кривой ( $\gamma$ ), где  $k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 < 0$  и на ( $A_2$ ) — внутри ( $\gamma$ ), где  $k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 > 0$ . Точки поверхности ( $A_1$ ) являются для уравнений (6) устойчивыми узлами, точки ( $A_2$ ) — седлами, а точки самой кривой ( $\gamma$ ), как нетрудно показать, особыми точками типа седло — узел и в пределе при  $\lambda \rightarrow 0$  все фазовые траектории «скачков» (они лежат в плоскостях  $y_1, y_2 = \text{const}$ ) идут из бесконечности и из окрестностей точек поверхности ( $A_2$ ) и кривой ( $\gamma$ ) в окрестности точек поверхности ( $A_1$ ). Начальная и конечная точки скачка ( $x_1^-, x_2^-, y_1^0, y_2^0$ ) и ( $x_1^+, x_2^+, y_1^0, y_2^0$ ) в том случае, когда первая лежит на поверхности ( $A_2$ ) или на кривой ( $\gamma$ ), очевидно, связаны условием:

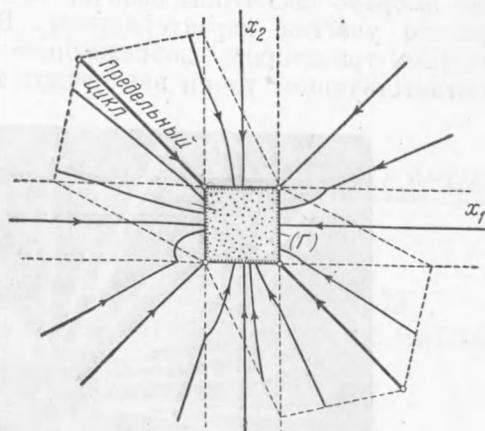


Рис. 2

$$x_1^- + k\varphi(x_2^-) = x_1^+ + k\varphi(x_2^+), \quad x_2^- = k\varphi(x_1^-) = x_2^+ + k\varphi(x_1^+). \quad (9)$$

3. Поэтому можно считать, что при достаточно малых  $\lambda$  фазовые траектории «медленных», нескачкообразных движений (с ограниченными при  $\lambda \rightarrow 0$  фазовыми скоростями) лежат только в окрестности поверхности ( $A_1$ ), причем эта окрестность стягивается к поверхности ( $A_1$ ) при  $\lambda \rightarrow 0$ . Тогда при рассмотрении вырожденной системы (при  $\lambda=0$ ) можно считать эти фазовые траектории медленных нескачкообразных движений лежащими на самой поверхности ( $A_1$ ); их дифференциальные уравнения получаются из уравнений поверхности ( $A_1$ ) и первых двух уравнений системы (3):

$$\dot{x}_1 + x_1 + k\varphi'(x_2) \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_2 + x_2 + k\varphi'(x_1) \dot{x}_1 = 0, \quad (10)$$

причем  $k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 < 0$ .

Очевидно, можно вместо фазовых траекторий на поверхности ( $A_1$ ) рассматривать их проекции на плоскость  $x_1, x_2$ .

4. Таким образом доопределение — закон скачка изображающей точки, необходимый для рассмотрения разрывных колебаний мультивибратора на фазовой плоскости  $x_1, x_2$  (при пренебрежении паразитными параметрами), может быть сформулирован следующим образом.

I. Скачки изображающей точки происходят не только с кривой ( $\Gamma$ ), где  $k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1$  меняет знак, но и из области внутри ее, где  $k^2 \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) - 1 > 0$ .

II. Концевая точка скачка ( $x_1^+, x_2^+$ ) определяется по начальной ( $x_1^-, x_2^-$ ) разбиением на фазовой траектории «плоскости скачков» согласно дифференциальным уравнениям (6)\*.

\* В рассматриваемой задаче о мультивибраторе уравнения (10) для каждой точки кривой ( $\Gamma$ ) дают единственную концевую точку скачка, и поэтому использование

На рис. 2 изображено разбиение плоскости  $x_1, x_2$  на фазовые траектории («медленных» движений) для кусочно-линейной аппроксимации характеристик ламп, использованной в работах (2, 4) (сеточное смещение выбрано так, чтобы рабочие точки ламп лежали посередине восходящего участка характеристики). Внутри квадрата ( $\Gamma$ ) нет никаких фазовых траекторий: изображающие точки оттуда скачком уходят в соответствующие точки вне квадрата ( $\Gamma$ ).

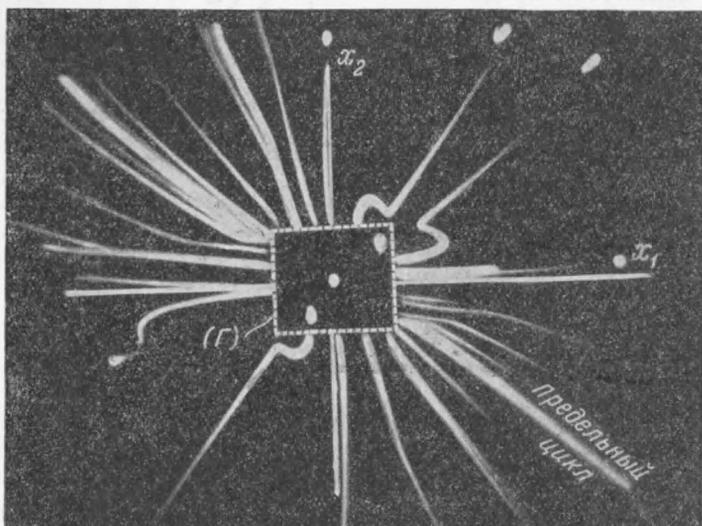


Рис. 3

5. Проведенная экспериментальная проверка полностью подтвердила правильность уточненного закона скачка. На рис. 3 дана фотография фазовых траекторий на плоскости сеточных напряжений (на плоскости  $x_1, x_2$ ), полученных на экране катодного осциллографа для симметричного мультивибратора. Она получена многократным фотографированием траекторий при разнообразных начальных условиях (8). Ясно видно, что скачки начинаются не только со сторон квадрата ( $\Gamma$ ), но и внутри его. Точки, заброшенные в начальный момент внутри квадрата ( $\Gamma$ ), скачком уходят отсюда.

Горьковский исследовательский физико-технический институт

Поступило  
15 VII 1951

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. А. Андронов и А. А. Витт, ДАН, 189 (1930). <sup>2</sup> С. Э. Хайкин, ИЭСТ, № 1, 23 (1933). <sup>4</sup> А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, М.—Л., 1937, стр. 401. <sup>3</sup> Н. А. Железцов, ЖТФ, 20, 778 (1950). <sup>5</sup> J. Block, S. Jopke, Physica, 16, 381 (1950). <sup>6</sup> А. С. Бремзен и И. С. Файнберг, ЖТФ, 11, 959 (1941). <sup>7</sup> В. В. Виткевич, ЖТФ, 20, 1245 (1950). <sup>8</sup> В. Бовшеверов, Technical Physics of the USSR, 11, 43 (1935).

дифференциальных уравнений «скачков» (7) для определения конечной точки скачка не является необходимым; однако только на основании этих уравнений мы можем утверждать, что скачки происходят и из точек внутри кривой ( $\Gamma$ ). Рассмотрение дифференциальных уравнений скачков особенно существенно в других задачах с разрывными колебаниями, когда условия скачка (типа (10)) допускают несколько конечных точек скачка и для устранения этой неоднозначности приходилось делать дополнительные искусственные гипотезы (примером такой задачи является задача о колебаниях связанных мультивибраторов (6)). В таких задачах рассмотрение хода фазовых траекторий «скачков» на основании дифференциальных уравнений (типа (7)) снимает эту неоднозначность без введения дополнительных гипотез.