Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

К. СИТНИКОВ

ЗАКОН ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 X 1951)

1. В этой заметке доказывается следующая теорема:

Общая теорема двойственности. *Пусть M^n — замкнутое n-мерное (гомологическое) многообразие, p и q — неотрицательные целые числа, дающие в сумме $n-1$; предполагаем, что M^n ациклично в размерностях q и $q+1$. Тогда для любого множества $A \subseteq M^n$ и $B = M^n \setminus A$ группы $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$, взятые по одной и той же произвольной области коэффициентов $\mathfrak{G}$, изоморфны между собою.*

При этом группа $\Delta^q B$ есть фактор-группа группы следующим образом определенных q-мерных Δ-циклов в B по подгруппе ограничивающих циклов: под Δ-циклом $z^q = \{z_k^q, x_k^{q+1}\}$ в B понимается последовательность лежащих на каком-либо компакте $\Phi \subseteq B$ ε_k-циклов z_k^q и ε_k-цепей x_k^{q+1}, $\varepsilon_k \to 0$, причем $\Delta x_k^{q+1} = z_{k+1}^q - z_k^q$; цикл z^q ограничивает в B, если на некотором компакте Φ', $\Phi \subseteq \Phi' \subseteq B$, существуют ε_k'-цепи y_k, x_k $(\varepsilon_k' \to 0)$, такие, что $\Delta y_k = z_k^q$, $\Delta x_k = y_{k+1} - y_k - x_k^{q+1}$. Если группа $\mathfrak{G}$ бикомпактна, то $\Delta^q B$ совпадает с обычной группой $\Delta_c^q B$ Бетти „с компактными носителями" ($\Delta_c^q B$ в смысле ([1]), стр. 164—165). Рассмотрение групп $\Delta^q B$ эквивалентно рассмотрению групп Стинрода ([3]), основанных на так называемых регулярных циклах.

Группы $\nabla^p A$ давно известны (см., например, Чогошвили ([4])): это ∇-группы, основанные на бесконечных ∇-циклах, взятых на нервах звездно-конечных покрытий α множества A (каждый элемент покрытия α пересекается лишь с конечным числом элементов α). Более подробно группа $\nabla^p A$ определяется так: если покрытие β вписано в α, то даны симплициальные отображения („проекции") $\widetilde{\omega}_\alpha^\beta$ нерва β в нерв α (покрытия и их нервы обозначаются теми же буквами); пусть z_α^p произвольный, вообще говоря, бесконечный ∇-цикл на α. Проекция $\widetilde{\omega}_\alpha^\beta$ определяет на β ∇-цикл $z_\beta^p = \pi_\beta^\alpha z_\alpha^p$ по формуле $z_\beta^p \cdot t_\beta^p = z_\alpha^p \cdot \widetilde{\omega}_\alpha^\beta t_\beta$ для любого симплекса $t_\beta^p \in \beta$. Пусть α и β — произвольные покрытия A и z_α^p, z_β^p суть ∇-циклы на них. Эти циклы гомологичны между собою в A, если существует такое покрытие γ, вписанное в α и в β, что $\pi_\gamma^\alpha z_\alpha^p \sim \pi_\gamma^\beta z_\beta^p$ в γ. Таким образом определенные гомологические классы суть элементы группы $\nabla^p A$. Для любых двух классов $\mathfrak{z} \in \nabla^p A$ и $\mathfrak{z}' \in \nabla^p A$ существует такое покрытие α, что на нем имеются циклы $z_\alpha \in \mathfrak{z}$ и $z_\alpha' \in \mathfrak{z}$; тогда $\mathfrak{z} + \mathfrak{z}'$ определяется как класс, содержащий цикл $z_\alpha + z_\alpha'$.

2. Пользуемся обозначениями работы ([1]). Пусть τ — триангуляция произвольной окрестности λ множества A. Бесконечные циклы (Δ- и ∇-) этой триангуляции называем τ-циклами. Если τ' следует за τ (пишем: $\tau' > \tau$), т. е. каждый симплекс $t' \in \tau'$ лежит на некотором симплексе $t \in \tau$, то определяем „подразделение" τ-цикла z, обозначаемое через $s^{\tau}_{\tau'} z$, полагая для Δ-цикла $s^{\tau}_{\tau'} z \cdot t' = z \cdot t$, а для ∇-цикла $s^{\tau}_{\tau'} z \cdot t' = z \cdot \varphi t'$, где φ' — определенный канонический сдвиг τ' в τ. Этим установлены гомоморфизмы $s^{\tau}_{\tau'}$ как Δ-, так и ∇-групп τ в соответствующие группы τ' и определены прямые спектры этих групп. Предельные группы этих спектров обозначаем (для размерности r) через $\Delta^r_{\scriptscriptstyle B} A$ и $\nabla^r_{\scriptscriptstyle B} = A$. Их элементами являются классы циклов, гомологичных между собою „вокруг A". При данном τ группы $\nabla^p \tau$ и $\Delta^{q+1} \tau$ связаны между собою хорошо известным изоморфизмом D_τ („двойственность Пуанкаре"). Докажем соотношение переместительности $s^{\tau}_{\tau'} D_\tau = D_{\tau'} s^{\tau}_{\tau'}$; из него следует изоморфизм групп $\nabla^p_{\scriptscriptstyle B} A$ и $\Delta^{q+1}_{\scriptscriptstyle B} A$. Без ограничения общности (перейдя, если нужно, к подразделению комплекса τ') можно предположить, что $\tau' = \cup \tau'_m$, где τ'_m есть конечный подкомплекс некоторого подразделения τ_m комплекса τ и τ_{m+1} есть подразделение τ_m. Для однозначной определенности последующих построений выбираем для каждого m определенный канонический сдвиг τ_{m+1} в τ_m (значит, и τ' в $\tau = \tau_0$), а также определенный канонический сдвиг барицентрического подразделения τ_m в комплекс τ_m (для симплексов, входящих в различные τ_m, эти сдвиги их барицентрических подразделений должны быть одними и теми же). Для краткости полагаем $s = s^{\tau}_{\tau'}$ и $s_m = s^{\tau}_{\tau_m}$, а индекс при D опускаем. Пусть z есть ∇-цикл на τ, $Dz = u$, $Ds_m z = u_m$. Каждый симплекс $t \in \tau'$ есть симплекс некоторого τ'_m и $sz \cdot t = s_i z \cdot t$ для всех $i \geqslant m$. Легко видеть, что если симплекс $t \in \tau'$ входит в открытое ядро (τ'_m) комплекса τ'_m, то $Dsz \cdot t = u_m \cdot t$. Далее (см. ([2]), гл. 14, § 5) можно найти такие цепи x_{m+1} в $\tau_{m+1} - (\tau'_m)$, что $\Delta x_{m+1} = s_{m+1} u_m - u_{m+1}$. Положим $x'_m = s x_m$, $x' = \Sigma x'_m$ (суммирование имеет смысл, так как на каждом $t \in \tau'$ лишь конечное число $x'_m \neq 0$). Убедимся, что $\Delta x' = su - Dsz$.

Пусть $t \in (\tau_m)$ — какой-нибудь симплекс из τ'. На t имеем $su - Dsz = s_m u - u_m = \Delta \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} s_m x_k = \Delta x'$, ч. т. д.

3. Изоморфизм $\nabla^p A = \nabla^p_{\scriptscriptstyle B} A$. Пусть α — покрытие множества A. Заменяем его элементы открытыми в M^n множествами так, чтобы полученное покрытие (которое обозначаем снова через $\alpha = \{o_{\alpha i}\}$) было подобно первоначальному. Триангуляцию τ_α окрестности $\lambda_\alpha = \cup o_\alpha$ берем столь мелкой, чтобы существовал канонический сдвиг f_α триангуляции τ_α в нерв α. Тогда каждому ∇-циклу z_α нерва α соответствует ∇-цикл $u_\alpha = \overline{f}_\alpha z_\alpha$ на τ_α. Докажем, что если $z_\alpha \sim z_\beta$ в A, то $u_\alpha \sim u_\beta$ вокруг A. Берем покрытие γ, вписанное в α и в β и такое, что $\pi^\alpha_\gamma z_\alpha \sim \pi^\beta_\gamma z_\beta$ в γ. Берем настолько мелкую триангуляцию $\tau_\gamma > \tau_\alpha, \tau_\beta$, чтобы существовал ее канонический сдвиг f_γ в γ. Сдвиги τ_γ в τ_α и τ_β обозначим через φ^γ_α и φ^γ_β. Тогда $f_\alpha \varphi^\gamma_\alpha$ и $\tilde{\omega}^\gamma_\alpha f_\gamma$ суть канонические сдвиги τ_γ в α, поэтому $\overline{\varphi}_\alpha \overline{f}_\alpha z_\alpha \sim \overline{f}_\gamma \pi^\alpha_\gamma z_\alpha$ в τ_γ. Аналогично $\overline{\varphi}_\beta \overline{f}_\beta z_\beta \sim \overline{f}_\gamma \pi^\beta_\gamma z_\beta$ в τ_γ. Так как правые части гомологичны между собою в τ_γ, левые суть $s^\alpha_\gamma u_\alpha$ и $s^\beta_\gamma u_\beta$, то утверждение доказано.

Итак, отображения $\overline{f}_\alpha$ порождают гомоморфизм $\overline{f}$ группы $\nabla^p A$ в $\nabla^p_{\scriptscriptstyle B} A$. Докажем, что $\overline{f}$ — изоморфизм. Пусть $u_\alpha = \overline{f}_\alpha z_\alpha \sim 0$ вокруг A, т. е. некоторое $s^\alpha_\gamma u_\alpha \sim 0$ в τ_γ. Пусть γ — покрытие, состоящее из пересечений с A звезд вершин τ_γ. Налагая на сдвиг φ^γ_α нерва $\gamma \subseteq \tau_\gamma$ в τ_α сдвиг f_α (комплекса τ_α в α), получим проекцию $\widetilde{\omega}^\gamma_\alpha$; обозначая через J оператор высечения (из τ_γ в γ), имеем $\pi^\alpha_\gamma z_\alpha = J s^\alpha_\gamma \overline{f}_\alpha z_\alpha = J s^\alpha_\gamma u_\alpha \backsim 0$ в γ, ч. т. д.

Докажем, наконец, что f отображает $\nabla^p A$ на $\nabla^p_в A$. Пусть u — цикл некоторой триангуляции τ окрестности λ множества A. Найдем цикл вида $\overline{f}_\alpha z_\alpha$, гомологичный циклу u вокруг A. Пусть α состоит из пересечений с A звезд O_i вершин τ; тогда нерв $\alpha \subseteq \tau$, и на нем лежит цикл $z_\alpha = Ju$. Заменяем α подобным покрытием (обозначаемым снова через α), состоящим из открытых в M^n множеств (содержащихся в соответствующих O_i), сумма которых есть некоторое $\lambda_\alpha \subseteq \lambda$. Триангуляцию τ_α множества λ_α берем столь мелкой, чтобы $\tau_\alpha > \tau$ и чтобы существовал сдвиг f_α комплекса τ_α в нерв α. Тогда $\overline{f}_\alpha z_\alpha = s_\alpha u$, ч. т. д.

4. Изоморфизм групп $\Delta^{q+1}_в A$ и $\Delta^q B$. Каждому бесконечному Δ-циклу $u = u^{q+1}$ триангуляции τ окрестности $\lambda \supseteq A$ ставим в соответствие Δ-цикл $z^q = \Gamma u$ множества B следующим образом. Берем возрастающую последовательность $\{\tau_k\}$, $\bigcup \tau_k = \tau$, конечных открытых подкомплексов комплекса τ и обозначаем через z^q_k границу лежащего на τ_k куска u_k цикла u; полагаем $x_k = u_{k+1} - u_k$. После бесконечно малого сдвига ψ получаем цикл на $\Phi = M^n \setminus \lambda$, который вновь обозначаем через $z^q = \{z^q_k, x_k\}$.

а) Выбирая различными способами последовательности $\{\tau_k\}$, получим гомологичные между собою в B циклы z^q.

б) Если $\tau_\beta > \tau_\alpha$ и $u_\beta = s^\alpha_\beta u_\alpha$, то $\Gamma u_\alpha \backsim \Gamma u_\beta$ в B.

Действительно, берем последовательности $\tau_{\alpha k}$ в $\tau_{\beta k}$ так, чтобы $\tau_{\beta k}$ было подкомплексом подразделения $\tau_{\alpha k}$; в этом подразделении берем кусок y_k цикла u, лежащий на дополнении к $\tau_{\beta k}$. Тогда, беря цепи в надлежащих подразделениях, имеем $\Delta y_k = z^q_{\alpha k} - z^q_{\beta k}$ и $y_{k+1} - y_k - x_{\alpha k} + x_{\beta k} = 0$, ч. т. д.

в) Если $u \backsim 0$ в τ, то $\Gamma u \backsim 0$ в B.

Из изложенного следует, что оператор Γ осуществляет одноименный гомоморфизм группы $\Delta^{q+1}_в A$ в $\Delta^q B$.

г)* Гомоморфизм Γ отображает $\Delta^{q+1}_в$ на $\Delta^q B$.

Действительно, пусть $z^q = \{z^q_i, x_i\}$ лежит на компакте $\Phi \subseteq B$. Цикл z^q_i ограничивает в M^n цепь x_0. Определим операцию урезания бесконечного цикла $u = \sum\limits_{i \geq 0} x_i$ окрестностью $\lambda = M^n \setminus \Phi$ множества A. Для этого берем какую-нибудь триангуляцию множества λ и всевозможные пересечения симплексов этой триангуляции с симплексами цикла u и их гранями; полученные многогранники разбиваем на симплексы; в результате получается некоторая триангуляция τ. Урезанный цикл u_0 определяем, давая ему на каждом симплексе $t \in \tau$, лежащем на некотором симплексе T цикла u, значение $u \cdot T$. Для доказательства гомологии $\Gamma u_0 \backsim z^q$ в B достаточно взять последовательность $\{\tau_k\}$ так, чтобы цепи u_k были кусками цепей $\sum\limits_{h<k} x_h$ и находились на положительном расстоянии от x_h, $h \geq k+1$.

д) Гомоморфизм Γ есть изоморфизм.

В самом деле, пусть $z^q = \{z^q_i, x_i\} = \Gamma u \backsim 0$ в B, причем $z^q_i = \Delta y_i$ в Φ и $y_{i+1} - y_i - x_i = \Delta x^{q+2}_i$ в Φ. Пусть, кроме того, $y_1 - x_0 = \Delta x^{q+2}_0$

* Рассуждения этого и следующего пунктов аналогичны рассуждениям Стинрода ([3]).

в M^n. Обозначая через π призму бесконечно малого сдвига ψ (см. § 4, начало) цикла u, имеем $\Delta(\Sigma - x_i^{q+2} + \pi) = u$. Урезая обе части этого равенства посредством λ (что не влияет на u), получим искомую гомологию $u \backsim 0$ в λ, что завершает доказательство нашей теоремы двойственности.

5. Замечание. Обе рассмотренные выше группы $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$ определяются как предельные группы прямых спектров (ведь $\Delta^q B = \lim \Delta^q \Phi$ по всем компактам $\Phi \subseteq B$). Пользуясь методом П. С. Александрова (переход к каноническим покрытиям ([1])), можно утверждать не только изоморфизм $\nabla^p A = \Delta^q B$, но и существование в этих спектрах двух изоморфных конфинальных частей.

6. Случай бикомпактной области коэффициентов. Связь с законом двойственности П. С. Александрова. В этом случае в $\Delta^q B = \Delta_c^q B$ выделяется группа незацепляемости $\Delta_0^q B$ (см. ([1])). Аналогично в $\nabla^p A$ выделяется подгруппа $\nabla_0^p A$, определяемая циклами, скалярное произведение которых со всяким проекционным Δ-циклом ([1]) равно нулю.

Из сделанного только что замечания вытекает следующая теорема.

Теорема. *Между группами $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$ существует изоморфизм, переводящий $\nabla_0^p A$ в $\Delta_0^q B$, так что фактор-группы $\nabla'^p A = \nabla^p A - \nabla_0^p A$ и $\Delta'^q B = \Delta^q B - \Delta_0^q B$ изоморфны, а группы $\Delta_0^q B$ (соответственно $\nabla_0^p A$) инвариантны при топологических преобразованиях A (соответственно B).*

Более того: группы $\Delta'^q B$ и $\nabla'^p A$ после введения в них топологии как в ([1]) становятся топологически изоморфными. Этот топологический изоморфизм распространяется и на бикомпактные пополнения $\overline{\Delta}^q B$ и $\overline{\nabla}^p A$ этих групп (в ([1]) группа $\overline{\Delta}^q B$ обозначена через $\Delta^q B$). В силу результатов Чогошвили (см., например, ([1])) группа $\overline{\nabla}^p A$ двойственна группе $\delta^p A$, значит, группы $\delta^p A$ и $\overline{\Delta}^q B$ двойственны между собою, что составляет утверждение закона двойственности П. С. Александрова.

Поступило
24 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Матем. сборн., 21, 161 (1947). [2] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.—Л., 1947. [3] N. E. Steenrod, Ann. of Math., 41, 833 (1940); Усп. матем. наук, 2, в. 2, 56 (1947). [4] Чогошвили, О соотношениях двойственности, докторск. дисс., Матем. ин-т АН СССР, 1945.