Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

В. А. РОХЛИН

ТРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — ГРАНИЦА ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 IX 1951)

1. Формулировка результата. Под многообразием в этой работе понимается гладкое компактное многообразие — замкнутое или с краем. Говорят, что многообразие M^k ограничивает, если оно гладко гомеоморфно краю некоторого многообразия M^{k+1}, которое ориентируемо, если M^k ориентируемо. Результат работы состоит в том, что *всякое замкнутое трехмерное многообразие M^3 ограничивает*. Эта теорема находит применение при классификации отображений $(n+3)$-мерной сферы в n-мерную (см. (1), п° 3) и высказывалась (для ориентируемого случая) в качестве гипотезы Л. С. Понтрягиным (2).

Мы рассмотрим только ориентируемый случай. В дальнейшем многообразие M^3 предполагается связным.

2. План доказательства. Отправным пунктом служит следующий факт:

А. *Если ориентируемое замкнутое многообразие M^3 вложимо в пятимерное евклидово пространство R^5, то M^3 ограничивает.*

Чтобы вывести из этой леммы общую теорему, мы определим две операции O_1 и O_2, каждая из которых превращает ориентируемое замкнутое многообразие M^3 в такое же многообразие и которые обладают следующими свойствами:

Б. *Всякое ориентируемое замкнутое многообразие M^3 может быть превращено конечным числом операций O_1, O_2 в многообразие, вложимое в R^5.*

В. *Если одно из многообразий $O_1(M^3)$, $O_2(M^3)$ ограничивает, то многообразие M^3 также ограничивает.*

Из лемм А, Б, В непосредственно следует, что всякое ориентируемое замкнутое многообразие M^3 ограничивает.

3. Определение операций O_1, O_2. Пусть K — тело тора в M^3 с дифференцируемыми координатами α, ξ, η, где α — циклическая координата, а $\xi^2+\eta^2 \leqslant 1$. Удалим внутренность тела K и склеим ставший граничным тор $\xi^2+\eta^2=1$ в бутылку Клейна B^2, отождествив на нем точки (α, ξ, η) и $(\alpha+\pi, \xi, -\eta)$. Тогда M^3 превратится в $O_1(M^3)$.

Пусть K', K'' — два непересекающихся тела тора в M^3 с координатными системами α, ξ, η уже описанного типа, индуцирующими в M^3 противоположные ориентации. Удалим внутренности тел K', K'' и склеим ставшие граничными торы $\xi^2+\eta^2=1$ друг с другом в тор T^2 так, чтобы точки с одинаковыми значениями координат α, ξ, η совпали. Тогда M^3 превратится в $O_2(M^3)$.

4. Доказательство леммы Б. Точка $x \in M$ называется кратной относительно отображения f множества M, если существует такая точка $y \in M$, что $y \neq x$, но $f(y) = f(x)$; если существует только одна такая точка y, то точка x называется двойной. Из результатов Уитнея ([3]) следует, что существует гладкое отображение f многообразия M^3 в R^5, обладающее следующими свойствами: а) ранг функциональной матрицы отображения f равен 3 в каждой точке $x \in M^3$; б) все кратные точки отображения f являются двойными и располагаются на непересекающихся замкнутых гладких кривых $C_1, C_2, \ldots, C_p$; $C_1', C_1'', C_2', C_2'', \ldots$ $\ldots, C_q', C_q''$ таким образом, что C_i дважды налагается на $f(C_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$, а $f(C_j') = f(C_j'')$ $(j = 1, \ldots, q)$; в) две трехмерные плоскости, касательные к $f(M^3)$ в точке $f(x) = f(y)$ $(y \neq x)$, имеют одномерное пересечение для всякой двойной точки $x \in M^3$. Пусть K_i, K_j', K_j'' — непересекающиеся замкнутые торовидные окрестности кривых C_i, C_j', C_j'' в M^3 с координатами α, ξ, η (см. п° 3). Удалив из M^3 внутренности всех тел K_i, K_j', K_j'', мы получим вложение оставшегося ограниченного многообразия $\overline{M}^3$ в R^5. Если произвести на границе многообразия $\overline{M}^3$ для каждого значения i и каждого значения j склеивания, описанные в п° 3, то получится замкнутое многообразие N^3, являющееся результатом применения к M^3 p операций типа O_1 и q операций типа O_2. Соответствующие склеивания на границе многообразия $f(\overline{M}^3)$ могут быть осуществлены в R^5, и мы получаем вложение многообразия N^3 в R^5.

5. Доказательство леммы В. Пусть $M_1^3 = O_1(M^3)$ есть край ориентируемого многообразия M_1^4. Положим на торе $\xi^2 + \eta^2 = 1$, лежащем в M^3, $\xi = \cos\beta$, $\eta = \sin\beta$ и будем считать, что α и β суть координаты на поверхности (бутылке Клейна) B^2, связанные соотношением $(\alpha, \beta) = (\alpha + \pi, -\beta)$. Эту систему координат мы включим в дифференцируемую систему координат α, β, s $(-1 \leqslant s \leqslant 1$; α и β — попрежнему циклические координаты), определенных в некоторой замкнутой окрестности U^3 поверхности B^2 в M_1^3 и связанных соотношением $(\alpha, \beta, s) = (\alpha + \pi, -\beta, -s)$, и сделаем это так, чтобы поверхность B^2 определялась уравнением $s = 0$. Окрестность края M_1^3 в M_1^4 разлагается в дифференцируемое прямое произведение края M_1^3 на числовой отрезок. В соответствии с этим мы включим систему координат α, β, s в дифференцируемую систему координат α, β, s, t $(-1 \leqslant t \leqslant 1$; попрежнему α и β — циклические координаты, и $-1 \leqslant s \leqslant 1)$, определенных в некоторой замкнутой окрестности V^4 поверхности B^2 в M_1^4 и связанных соотношением $(\alpha, \beta, s, t) = (\alpha + \pi, -\beta, -s, t)$, и сделаем это так, чтобы окрестность U^3 определялась в V^4 уравнением $t = 1$, и, следовательно, поверхность B^2 определялась уравнениями $s = 0$, $t = 1$. Пусть W^4 — та часть окрестности V^4, в которой $s^2 + t^2 \leqslant 1$, и P^3 — ее граница $s^2 + t^2 = 1$. Положим в W^4 $s = \rho\sin\gamma$, $t = \rho\cos\gamma$ и будем рассматривать α, β, γ как координаты на P^3, связанные соотношением $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \pi, -\beta, -\gamma)$; в них B^2 определяется уравнением $\gamma = 0$. Вырежем из M_1^4 часть W^4 и приклеим ее другим способом, пользуясь гомеоморфизмом $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \gamma$, $\gamma' = \beta$ ее края P^3. Тогда M_1^4 превратится в ориентируемое многообразие M_2^4 (с тем же краем M_1^3), и B^2 будет определяться в P^3 уравнением $\beta = 0$. В W^4 это уравнение определит тело Q^3 с краем B^2; разрезав M_2^4 вдоль Q^3, мы и получим ориентируемое четырехмерное многообразие с краем, гладко гомеоморфным M^3.

В случае, когда ограничивает многообразие $O_2(M^3)$, доказательство вполне аналогично. Различие состоит в том, что теперь координаты α, β, s, t вводятся в окрестности тора T^2 (а не бутылки Клейна B^2) и не связаны никакими соотношениями.

6. Доказательство леммы А. Кнезеру ([4]) принадлежит конструкция, позволяющая путем постепенного уничтожения особенностей превратить k-мерный цикл, лежащий в комбинаторном $(k+1)$-мерном многообразии, в гомологичное ему k-мерное многообразие. Слегка видоизмененная и дополненная, эта конструкция позволяет превратить пленку, натянутую на лежащее в $(k+2)$-мерном евклидовом пространстве R^{k+2} ориентируемое замкнутое многообразие M^k, в ориентируемое $(k+1)$-мерное многообразие M^{k+1} с краем M^k. Сказанное имеет комбинаторный смысл; в частности, M^k есть подкомплекс комплекса R^{k+2}, а M^{k+1} — подкомплекс некоторого подразделения комплекса R^{k+2}. В этом комбинаторном смысле можно, таким образом, утверждать, что ориентируемое замкнутое многообразие M^k, лежащее в евклидовом пространстве R^{k+2}, есть край некоторого ориентируемого многообразия M^{k+1}.

Пусть теперь ориентируемое замкнутое многообразие M^3 гладко вложено в R^5. Мы заменяем это вложение близким ему комбинаторным вложением M_1^3, строим ориентируемое многообразие M_1^4 с краем M_1^3, и вводим в M_1^4 гладкость ([5]). Последнее можно сделать так, чтобы на крае новая гладкость совпала с заданной.

Поступило
11 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Рохлин, ДАН, **81**, № 1, (1951). [2] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., **21**, 233 (1947). [3] H. Whitney, Ann. of Math., **45**, 247 (1944). [4] H. Kneser, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam, **27**, 601 (1924). [5] S. Cairns, Ann. of Math., **45**, 218 (1944).