Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

Я. С. ДУБНОВ

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ КОНГРУЭНЦИЯ АФФИННОГО ГРАДИЕНТА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 IX 1951)

1. Определение и основная теорема. В метрической геометрии градиент скалярного поля, заданного на поверхности („поверхностный градиент"), определяется с помощью известной дифференциальной операции как некоторое поле, состоящее из векторов, касательных к поверхности. Возникающая отсюда обратная задача: для заданного на поверхности поля касательных векторов узнать, порождается ли оно скалярным потенциалом,— решается обычно координатными средствами, которые не дают желательной для приложений простой геометрической картины. В настоящем сообщении рассмотрение переносится в аффинную геометрию (ограничиваемся случаем скалярного поля на 2-мерной поверхности в 3-мерном аффинном пространстве). При этом роль упомянутого векторного поля переходит к прямолинейной конгруэнции, для которой и устанавливается критерий существования потенциала.

Пусть на поверхности S аффинного пространства задано скалярное поле $\varphi(M)$, где M — точка с радиусом-вектором $\mathbf{r}$. При обычных предположениях относительно гладкости поверхности, рассматриваемых на ней линий и поля φ любую кривую, проведенную на S через M_0, можно отнести к параметру φ (исключение составляет линия уровня $\varphi = \text{const}$) и построить в точке M_0 вектор $d\mathbf{r} / d\varphi$. Легко убедиться, что при фиксированной точке и меняющейся кривой концы всех векторов $d\mathbf{r} / d\varphi$ лежат на одной прямой (которая, заметим, параллельна касательной, проведенной в точке M_0 к линии $\varphi = \text{const} = \varphi(M_0)$); эту прямую мы и назовем *аффинным градиентом поля* φ *в точке* M_0*. Оставляя пока в стороне случай, когда S — плоскость, получим для различных положений точки M_0 на поверхности конгруэнцию (вообще говоря, непараболическую) прямых, из которых каждая принадлежит касательной плоскости, проведенной в соответствующей точке. Связь аффинного градиента с метрическим проста: если $\overrightarrow{MP}$ — поверхностный метрический градиент поля φ в точке M, то P есть полюс аффинного градиента относительно единичного круга, описанного из M в касательной плоскости. Можно доказать следующую теорему, составляющую центральный пункт этого сообщения: если каждой

* Чтобы оправдать это название, заметим, что в центроаффинной геометрии на плоскости (здесь это касательная в M_0 плоскость) прямую, не проходящую через центр, можно рассматривать как «дублет» ([3]) — образ ковариантного вектора, двойственный точке (образу контравариантного вектора), и тогда имеет место формула $d\varphi = \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{r}$, где в правой части — скалярное произведение дублета на вектор.

точке поверхности (не плоской) поставлен в соответствие луч конгруэнции (не параболической), лежащий в касательной плоскости, проведенной к поверхности в этой точке, то *для того чтобы конгруэнция допускала потенциал, необходимо и достаточно, чтобы она была гармонична поверхности* (т. е. чтобы торсам * конгруэнции отвечала на поверхности сопряженная сеть). Несколько неожиданным образом рассматриваемое свойство конгруэнции оказывается проективно-инвариантным: если в проективном пространстве P_3 точки поверхности поставлены в соответствие с прямыми конгруэнции C, лежащими в касательных плоскостях, и если P_3 превращено в аффинное пространство A_3 путем выделения в P_3 некоторой плоскости Π в качестве несобственной, то свойство конгруэнции C быть или не быть в полученном A_3 конгруэнцией аффинного градиента не зависит от выбора плоскости Π (однако потенциальная функция на S от этого выбора зависит). В применении к метрическому случаю имеем: для того чтобы поле векторов $\overrightarrow{MP}$, касательных к поверхности S в каждой ее точке M, допускало потенциал, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция, луч которой есть поляра точки P относительно единичного круга, описанного из M в касательной плоскости, была гармонична поверхности.

2. Приложения. Всякое заданное на поверхности $\mathbf{r}(M) = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ поле ковариантного тензора $\pi_i(M)$ ассоциирует с точкой M прямую $p(M)$, лежащую в касательной плоскости, именно — соединяющую концы проведенных из M векторов $\mathbf{r}_1 : \pi_1$ и $\mathbf{r}_2 : \pi_2$, где $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r} / \partial u_i$.

Согласно предыдущему, для того чтобы тензор π_i был градиентным ($e^{\alpha\beta}\pi_{\alpha|\beta} = 0$ при $e^{11} = e^{22} = 0$, $e^{12} = -e^{21} = 1$), необходимо и достаточно, чтобы торсам прямолинейной конгруэнции (p) отвечала на поверхности сопряженная сеть, именно сеть

$$e^{\lambda\mu} b_{\lambda\alpha} (\pi_{\mu|\beta} - \pi_\mu \pi_\beta)\, du^\alpha du^\beta = 0, \tag{1}$$

где $b_{ij} = b_{ji}$ — тензор из уравнения $b_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta = 0$ асимптотической сети. В предыдущих работах автора ([1], [2], [4]) рассматривалась сеть

$$\varphi_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta = 0 \quad (\varphi_{ij} = \varphi_{ji},\ \mathrm{Det}\, \varphi_{ij} \neq 0) \tag{2}$$

на поверхности, снабженной либо римановой метрикой, либо более обще — аффинной связностью; с этой сетью были связаны три „чебышевских" тензора τ_i, σ_i, χ_i, названных так потому, что обращение одного из них (а тогда и двух остальных) в нуль служит характеристическим признаком чебышевской сети. Именно, если тензор Φ_i^k („единичный девиатор сети") определить (с точностью до множителя ± 1) условиями

$$\Phi_i^\alpha \varphi_{k\alpha} + \Phi_k^\alpha \varphi_{i\alpha} = 0, \quad \Phi_\alpha^\beta \Phi_\beta^\alpha = 2,$$

то

$$2\tau_i = \Phi_\beta^\alpha \Phi_{i|\alpha}^\beta, \quad \sigma_i = \pm \Phi_i^\alpha \tau_\alpha,$$

где вертикальная черточка поставлена перед индексом ковариантного дифференцирования, производимого с помощью данной связности; тензор χ_i имеет метрический характер, как выяснится из приведенного ниже построения. В важном для приложений случае, когда связность определяется „оснащением" поверхности, т. е. заданием в каждой ее точке вектора („псевдонормального") $\mathbf{N}$, не лежащего в касательной плоскости, причем $\mathbf{r}_{i|j} = b_{ij}\mathbf{N}$, можно указать следующие построения

* Торс — развертывающаяся поверхность.

τ-прямой, σ-прямой и χ-прямой, соответствующих тензорам τ_i, σ_i, χ_i. В точке M поверхности строим касательные MT_1, MT_2 к линиям 1-го и 2-го из семейств, составляющих сеть; здесь через T_1 (соответственно T_2) обозначено предельное положение точки, в которой касательная MT_1 (MT_2) пересекается с плоскостью, определяемой в точке M' проведенными через нее псевдонормалью и касательной к линии 1-го (2-го) семейства, а предельный переход состоит в том, что точка M' неограниченно приближается к M, двигаясь по линии 2-го (1-го) семейства. Тогда $T_1 T_2$ даст τ-прямую, а $T_1^* T_2$ и $T_2^* T_1$ (где T_i^* — точка, симметричная с T_i относительно M) две σ-прямые, соответствующие двум значениям тензора σ_i; χ-прямую получим как не проходящую через M диагональ параллелограмма, одна из вершин которого находится в M, а две стороны проходят через T_1 и T_2, будучи соответственно перпендикулярными к MT_1 и MT_2.

Для некоторых классов сетей эти прямые допускают специальные построения. Так,

1° Для сопряженной сети τ-прямая совпадает (при любом оснащении поверхности) с прямой Лапласа — Дарбу, т. е. соединяет точки, соответствующие данной M в первом и минус-первом преобразованиях Лапласа.

2° В метрическом случае, если сеть ортогональна, то точке M, взятой на поверхности, отвечает в качестве τ-прямой та, которая соединяет центры геодезических кривизн линий сети, пересекающихся в этой точке; σ-прямая соединяет один из этих центров с отражением другого от точки M.

3° Снова в метрическом случае, τ-прямую геодезической сети можно получить, отражая от бисектрисы сетевого угла (ω) аффинный градиент функции $\ln \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$.

С другой стороны, градиентность тензоров τ_i, σ_i, χ_i или, вместо этого, конгруэнций, образованных соответствующими прямыми, часто характеризует важные типы сетей. Так, $\tau_i = \operatorname{grad}$ есть характеристический признак „кодацциевой сети" ([1]), т. е. такой, для которой тензор φ_{ik} из уравнения (2) при надлежащем нормировании имеет симметрическую ковариантную производную; сеть кодацциева-сопряженная = =сеть равных точечных инвариантов Лапласа — Дарбу; кодацциева-ортогональная = изотермическая сеть. Снова в случае ортогональной сети условие $\sigma_i = \operatorname{grad}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы сеть была эквиареальной, т. е. служила бы образом декартовой сети в надлежащем эквивалентном (= сохраняющем площади) отображении плоскости на поверхность S. Градиентность тензора χ_i характеризует сеть как ромбическую и т. п.

Комбинируя эти интерпретации градиентности чебышевских тензоров с теоремой предыдущего пункта, получаем характеристические свойства некоторых сетей, выраженные с помощью конгруэнций, связанных с этими сетями конструктивно. Ограничимся двумя примерами (результат, содержащийся в первом из них, известен).

1° Для того чтобы сопряженная сеть имела равные точечные инварианты, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая сети конгруэнция прямых Лапласа — Дарбу была гармонична поверхности ([5]).

2° Для того чтобы ортогональная сеть была изотермической, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция, каждая прямая которой соединяет центры геодезических кривизн двух линий сети, пересекающихся в соответствующей точке поверхности, была гармонична поверхности.

3. Особый случай. В случае „плоской конгруэнции", т. е. 2-параметрического семейства прямых, лежащих в одной плоскости и поставленных в соответствие точкам этой плоскости, можно пользо-

ваться следующим критерием градиентности. Если точка M смещается из M_0 в направлении $M_0 K$, то соответствующая прямая $p(M)$ конгруэнции огибает линию, которая пусть касается прямой $p(M_0)$ в точке L. Соответствие прямых $M_0 K \rightarrow M_0 L$ в пучке с центром M_0 всегда проективно; оно выражается билинейной зависимостью

$$(\pi_{\alpha|\beta} - \pi_\alpha \pi_\beta)\, du^\alpha \delta u^\beta = 0,$$

где, попрежнему, π_i — тензор, имеющий своим образом прямую p (см. начало п. 2), а отношениями $du^1 : du^2$ и $\delta u^1 : \delta u^2$ определяются, соответственно, направления $M_0 K$ и $M_0 L$. *Для того чтобы конгруэнция была градиентной, необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемый проективитет в каждой точке был инволюционным.* Пример: полярное соответствие относительно коники (не распадающейся); упомянутая выше огибающая вырождается в точку (L) — полюс прямой M_0K, соответствие $M_0K \rightarrow M_0 L$ инволюционно. Легко проверить, что если в аффинной плоскости коника имеет собственный центр O, то поляра точки M служит градиентом для функции $\varphi(M) = -\frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{OM}{ON}\right)^2 - 1 \right|$, где N — точка пересечения луча OM с коникой.

Научно-исследовательский
институт механики и математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. С. Дубнов, С. R., 192, № 5, 261 (1931). [2] Я. С. Дубнов, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 4, 196 (1937). [3] Я. С. Дубнов, там же, в. 8, 106 (1950). [4] Я. С. Дубнов, Уч. зап. МГУ, в. 100, 212 (1946). [5] Wilczinsky, Trans. Am. Math. Soc., 16, 318 (1915).