

М. М. ГРИНБЛЮМ

СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА *

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 IX 1951)

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы доказать продолжительность спектральной функции $P(\Delta)$ в смысле ⁽²⁾ в спектральную меру $P(M)$, определённую на теле множеств, содержащем все борелевские множества. В статье полностью сохраняются определения и обозначения, принятые в статьях ^(1, 2).

Как и в ⁽²⁾, E мы считаем регулярным пространством Банаха.

Обозначим через $O^{(0)}$ класс всех открытых множеств на $I(-\infty, \infty)$. Пусть α — нечетное трансфинитное число 1-го рода. Через $O^{(\alpha)}$ мы обозначим класс множеств, являющихся пересечением конечного или счетного числа множеств, принадлежащих классам $O^{(\lambda)}$, где $\lambda < \alpha$. Если α — трансфинитное число 2-го рода или четное число 1-го рода, то $O^{(\alpha)}$ есть класс множеств, являющихся суммой конечного или счетного числа множеств, принадлежащих классам $O^{(\lambda)}$, где $\lambda < \alpha$.

Обозначим через $F^{(0)}$ класс всех замкнутых множеств на I . Если α — нечетное трансфинитное число 1-го рода, то $F^{(\alpha)}$ есть класс множеств, являющихся суммой конечного или счетного числа множеств, принадлежащих классам $F^{(\lambda)}$, $\lambda < \alpha$. Если α — трансфинитное число 2-го рода или четное число 1-го рода, то $F^{(\alpha)}$ есть класс множеств, являющихся пересечением конечного или счетного числа множеств, принадлежащих классам $F^{(\lambda)}$, $\lambda < \alpha$.

Очевидно, что:

1. Каждое борелевское множество M принадлежит какому-нибудь классу $O^{(\alpha)}$ и какому-нибудь классу $F^{(\beta)}$.

2. Если M принадлежит классу $O^{(\alpha)}$, то его дополнение CM принадлежит классу $F^{(\alpha)}$.

3. Сумма или пересечение конечного числа множеств класса $O^{(\alpha)}$ (или $F^{(\alpha)}$) есть множество того же класса.

§ 1. Пусть Φ — линейный функционал, определенный на E , и $x \in E$. Тогда функция $\varphi_\Phi^*(\Delta) = \Phi(P(\Delta)x)$ имеет ограниченную вариацию и, следовательно, может быть естественным образом распространена на некоторое тело множеств, содержащее все борелевские множества. Таким образом, каков бы ни был $\Phi \in E^*$ и $x \in E$, функции $\varphi_\Phi^*(\Delta)$ соот-

* Текст заметки составлен В. Г. Винокуровым по более обширной рукописи скончавшегося М. М. Гринблума.

ветствует функция $\varphi_{\Phi}^x(M)$, вполне аддитивная на теле всех борелевских множеств числовой прямой I .

Пусть O — открытое множество на I и $F = CO = I \setminus O$. $O = \bigcup_1^{\infty} \tau_i$, где τ_i — непересекающиеся интервалы на I .

Если $O_n = \bigcup_1^n \tau_i$ и $F_n = I \setminus O_n$, то $F_n = \bigcup_1^m \sigma_i$, где σ_i — непересекающиеся отрезки. Функция φ_{Φ}^x определена на O_n и на $F_n^{(\lambda)}$. Введем обозначения: $P(O) = \left[\bigcup_1^{\infty} P(O_n) \right]$ и $P(F) = \bigcap_1^{\infty} P(F_n)$.

Теорема 1.

$$1^{\circ} P(O) = \sum_1^{\infty} P(\tau_i),$$

$$2^{\circ} P(O) + P(F) = E, \text{ причем } \rho(S_{P(O)}, P(F)) \geq \beta.$$

$$3^{\circ} \varphi_{\Phi}^x(O) = \Phi(P(O)x), \varphi_{\Phi}^x(F) = \Phi(P(F)x).$$

Теорема 2. Если O' и O'' — открытые множества и $O' \subset O''$, то $P(O') \subset P(O'')$. Равным образом, если F' и F'' — замкнутые множества и $F' \subset F''$, то $P(F') \subset P(F'')$.

Теорема 3. Пусть для всех множеств A , принадлежащих классам $O^{(\lambda)}$ или $F^{(\lambda)}$, где $\lambda < \alpha$, определены $P(A)$ и пусть доказано, что:

$$\text{I. } P(A) + P(CA) = E.$$

$$\text{II. } \rho(S_{P(A)}, P(CA)) \geq \beta.$$

III. Для любого линейного функционала Φ , определенного на E , и всякого $x \in E$

$$\varphi_{\Phi}^x(A) = \Phi(P(A)x).$$

IV. Если A' и A'' принадлежат классам $O^{(\lambda)}$ или $F^{(\lambda)}$, $\lambda < \alpha$, то из условия $A' \subset A''$ следует, что $P(A') \subset P(A'')$.

Тогда $P(A)$ можно определить для всех множеств A , принадлежащих классам $O^{(\alpha)}$ и $F^{(\alpha)}$, и притом так, что:

1° Для всех множеств этих классов будут выполняться условия I, II, III, IV.

2° Если множество A принадлежит какому-нибудь классу $O^{(\lambda)}$ или $F^{(\alpha)}$ при $\lambda < \alpha$, то новое определение $P(A)$ совпадает с ранее сделанным.

Из вышеизложенного следует, что спектральная функция $P(\Delta)$ может быть продолжена на тело борелевских множеств. При этом новая операторная функция $P(A)$ удовлетворяет условиям I, II, III, IV теоремы 3, причем под A в этих условиях понимается любое борелевское множество.

$P(A)$ можно рассматривать и как оператор и как подпространство. Рассматривая $P(A)$ как оператор, мы будем иметь:

$$|P(A)| < \frac{1}{\beta}.$$

§ 2. Мы будем говорить, что борелевское множество A_0 имеет меру нуль по отношению к спектральной функции P , если $P(A_0) \equiv \theta$.

Легко видеть, что если A_0 имеет меру нуль по отношению к P , то $\varphi_{\Phi}^x(A_0) = 0$ для любого $\Phi \in E^*$ и любого $x \in E$, и обратно, если A_0 — борелевское множество и если $\varphi_{\Phi}^x(A_0) = 0$ для любого $\Phi \in E^*$ и любого $x \in E$, то $P(A_0) \equiv \theta$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное множество на прямой I . Мы будем говорить, что $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль по отношению к P , или P -меру нуль, или спектральную меру нуль, если $\mathfrak{M}$ есть часть борелевского множества A_0 , имеющего меру нуль.

Определение. Множество $M \subset I$ называется измеримым по отношению к спектральной функции P , или P -измеримым, если M может быть представлено в виде $M = A \cup \mathfrak{M}$, где A — борелевское множество, а $\mathfrak{M}$ — множество меры нуль относительно P .

Лемма 1. Пусть A_1 и A_2 — борелевские множества без общих точек.

Тогда

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Лемма 2. Пусть M — множество, измеримое по отношению к P , и $M = A_1 \cup \mathfrak{M}_1^0$, $M = A_2 \cup \mathfrak{M}_2^0$ — два представления этого множества, в которых A_1 и A_2 — борелевские множества, а $\mathfrak{M}_1^0$ и $\mathfrak{M}_2^0$ — множества меры нуль по отношению к P .

Тогда

$$P(A_1) = P(A_2).$$

Обозначим совокупность всех P -измеримых множеств через B_P .

Теорема 4. B_P есть тело.

Определение. Пусть M — множество, измеримое по отношению к спектральной функции P , и пусть $M = A \cup \mathfrak{M}$, где A — борелевское множество, а $\mathfrak{M}$ — множество меры нуль по отношению к P .

Спектральной мерой $P(M)$ множества M , или P -мерой M , мы будем называть операторную функцию множества A , т. е. $P(M) = P(A)$.

Из леммы 2 следует, что это определение однозначно. Очевидно, что для всякого P -измеримого множества существуют два борелевских множества A и B , удовлетворяющих условиям:

$$A \subset M \subset B \quad \text{и} \quad P(A) = P(M) = P(B).$$

Теорема 5. $P(M)$ вполне аддитивная функция на теле B_P . Иначе говоря, если $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ — последовательность P -измеримых множеств, не имеющих попарно общих точек, и $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, то:

$$P(M) = P(M_1) + P(M_2) + \dots + P(M_n) + \dots$$

Это соотношение можно понимать и как соотношение между операторами и как соотношение между подпространствами. Отметим, что если M — множество, измеримое по отношению к P , то

$$P(S_{P(M)}, P(CM)) \geq \beta, \quad P(M) + P(CM) = E.$$

Первое из этих соотношений равносильно

$$|P(M)| \leq \frac{1}{\beta}.$$

Теорема 6. Пусть $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ — P -измеримые множества и $M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n \supset \dots$; $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$.

Тогда:

1° Если рассматривать $P(M_n)$ как подпространства, то $P(M) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P(M_n)$.

2° Если рассматривать $P(M_n)$ как операторы, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n)x = P(M)x$ для любого $x \in E$ в том смысле, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P(M_n)x - P(M)x\| = 0$.

Среднеазиатский
государственный университет

Поступило
25 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. М. Гринблум, ДАН, 70, № 5 (1950). ² М. М. Гринблум, ДАН, 70, № 6 (1950).