Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. О. ГЕЛЬФОНД

О ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хорошо известно, что если целая трансцендентная функция $f(z)$ принимает целые значения в точках 1, 2, 3, ..., то ее рост не может быть слишком мал. Действительно, если $M(r)$ — максимум модуля целой функции $f(z)$ при $|z|=r$, $f(n)$ при $n=1, 2, 3, \ldots$ целые числа и $M(r)<e^{\alpha r}$, $\alpha<\ln 2$, $r>r_0$, то $f(z)$ может быть только многочленом. Это теорема Г. Полиа [1]. Заметим, что число целых положительных чисел в круге радиуса r будет $N(r)=[r]=r-\lambda(r)$, $0\leqslant\lambda(r)<1$. Условие теоремы Полиа может быть теперь переписано в форме неравенства $\ln M(r)<\alpha N(r)$, $\alpha<\ln 2$, $r>r_0$, и мы видим, что целочисленность $f(z)$ в целых точках при условии, что $f(z)$ трансцендентна, накладывает на ее рост примерно такие же условия, как если бы она имела нули в этих же точках. В этом последнем случае неравенство $\ln M(r)<\alpha N(r)$, $\alpha<\pi$, влекло бы тождественное обращение в нуль $f(z)$. Совершенно так же, если $f(z)$ — целая функция, значения которой в целых точках гауссова поля, точках вида $m+ni$, где m и n целые, будут целыми числами того же поля, $M(r)$ — ее максимум модуля и выполняется неравенство

$$\ln M(\lambda r)<C(\lambda)N(r), \tag{1}$$

где $N(r)=\pi r^2+O(r)$ — число целых чисел вида $m+ni$ в круге $|z|=r$, а $\lambda>\lambda_0>1$ и $C(\lambda)$ — некоторые величины, от r не зависящие, то $f(z)$ может быть только многочленом [2], что, конечно, возможно. Можно было бы увеличить [3] число примеров, показывающих, что целая целочисленная функция в широком смысле этого слова, принимающая целые алгебраические значения, принадлежащие какому-нибудь кольцу целых чисел конечного алгебраического поля, при аргументе, пробегающем числа того же кольца, модуль максимума которой подчиняется условию типа (1), должна быть многочленом или, более обще, суммой произведений многочленов на показательные функции. Но во всех таких примерах предполагается, что $f(z)$ целочисленна на множестве значений аргумента, принадлежащих к конечному числовому полю.

Возникает вопрос, какие условия надо налагать на множество значений аргумента, на котором $f(z)$ целочисленна, для того, чтобы условие типа (1) вызывало бы принадлежность целой функции к какому-нибудь узкому классу функций. Естественно, что ограничиваться при этом только условием достаточно большого роста $N(r)$ нельзя, так как, например, функция e^{z^2} принимает целые значения в точках, число которых в круге $|z|\leqslant r$ больше, чем e^{r^2}, другими словами, для этой функции $N(r)>M(r)$.

Нижеследующая теорема показывает, что арифметические свойства множества целочисленности функции не играют роли.

Будем называть целую функцию $f(z)$ с максимумом модуля $M(r)$ нормально целочисленной на счетном множестве E, имеющем только одну предельную точку в бесконечности, если при $\alpha \in E$ $f(\alpha)$ целое число одного и того же для любого $\alpha \in E$ алгебраического поля K степени ν и

$$\max[|f(\alpha)|, |f_1|, \ldots, |f_{\nu-1}|] < C_0 M^{1+\delta}(|\alpha|), \quad C_0 = C_0(\delta), \tag{2}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_{\nu-1}$ — числа, сопряженные $f(\alpha)$, $C_0 > 0$ не зависит от $|\alpha|$, а $\delta > 0$ любое. Число ν будем называть степенью целочисленности. Пусть счетные множества точек E_1 и E_2 имеют только одну предельную точку в бесконечности. Предположим, что элементы множеств E_1 и E_2 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ расположены в порядке неубывания их модулей, и введем в рассмотрение функции $N_1(r)$, $N_2(r)$ и $N(r)$, положив

$$N_1(r) = \sum_{|\alpha_k| \leqslant r} 1, \quad N_2(r) = \sum_{|\beta_k| \leqslant r} 1, \quad N(r) = \min[N_1(r), N_2(r)]. \tag{3}$$

Будем называть $N(r)$ аддитивной плотностью множества $E = E_1 + E_2$, составленного из всех чисел вида $\alpha_k + \beta_m$. Множества E_1 и E_2 могут и совпадать.

Теорема. *Если целая функция $f(z)$ с максимумом модуля $M(r)$, нормально целочисленна на множестве $E = E_1 + E_2$ с аддитивной плотностью $N(r)$, то можно указать два таких числа θ и λ, например, любые $\theta > 4$ и $\lambda > 4(\nu+1)\ln\left(\frac{\theta}{2} - 1\right)$, ν — степень целочисленности, что при выполнении неравенства*

$$\ln M(\theta r) < \lambda N(r) \tag{4}$$

$f(z)$ должна быть одним из решений функционального уравнения

$$\sum_{k=1}^{m} A_k f(z + \beta_k) = 0, \quad m > 1, \tag{5}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — целые алгебраические, в совокупности отличные от нуля числа.

Доказательство. Предположим, что $\theta > 4$ и $\lambda > 4(\nu+1)\ln\left(\frac{\theta}{2} - 1\right)$. В дальнейших рассуждениях числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ будут постоянными. Пусть ρ — достаточно большое число, величина которого будет в дальнейшем определена. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(z)$

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(z + \beta_k), \quad A_k = \sum_{s=1}^{\nu} A_{k,s}\omega_s, \quad n = N(\rho), \tag{6}$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_\nu$ — базис кольца целых чисел алгебраического поля, к которому принадлежат числа $f(\alpha_k + \beta_m)$, а $A_{k,s}$ — целые рациональные числа, в совокупности отличные от нуля,

$$|A_{k,s}| < a_1[M(2\rho)]^{1+\delta}, \quad 1 \leqslant s \leqslant \nu, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{7}$$

выбранные так, чтобы выполнялись равенства $F(\alpha_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $m = \left[\frac{1}{2} N(\rho)\right]$. Такой выбор целых чисел $A_{k,s}$ можно всегда осуществить с помощью принципа Дирихле (см., например, лемма I работы [4]).

Выберем теперь число δ в условии (2) и $\varepsilon > 0$ удовлетворяющими неравенствам

$$\varepsilon < \theta - 4, \quad 4\nu(1+\delta)\ln\frac{\theta-2}{2+\varepsilon} < \lambda. \tag{8}$$

Так как $F(z)$ имеет нули в точках α_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, то по принципу максимума мы будем иметь при $|z| \leqslant \rho_1(1+\varepsilon)$ и $R = (\theta - 1)\rho$, что

$$|F(z)| < a_2[M(2\rho)]^{1+\delta} N(\rho)\left[\frac{\rho_1+\rho}{R-\rho}\right]^m M(R+\rho) <$$

$$< a_2 N(\rho)\left(\frac{2+\varepsilon}{\theta-2}\right)^{\frac{1}{2}N(\rho)}[M(\theta\rho)]^{1+\delta}. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу условий (2) и того, что $F(\alpha_k+\beta_s)$ — целые алгебраические числа, мы будем иметь, что или $F(\alpha_k+\beta_s)=0$ или, при $z=\alpha_k+\beta_s$, $|z|<(2+\varepsilon)\rho$,

$$|F(z)| > a_3\{M[(2+\varepsilon)\rho]\}^{-(\nu-1)(1+\delta)}[N(\rho)M(2\rho)]^{-(\nu-1)(1+\delta)}. \tag{10}$$

В силу выбора δ и ε, условий, наложенных на θ и λ, и неравенства (4), неравенства (9) и (10) станут противоречивыми при $\rho > \rho'$. Поэтому при $\rho > \rho'$ $F(\alpha_k)=0$, $|\alpha_k| \leqslant (1+\varepsilon)\rho$. Но тогда, так как $F(z)$ имеет нули в точках α_k, $|\alpha_k| \leqslant (1+\varepsilon)\rho = \rho_1$, опять, на основании принципа максимума, при $|z| \leqslant \rho_2 = (1+\varepsilon)\rho_1$ и $R=(\theta-1)\rho_1$, воспользовавшись неравенством (9), где можно заменить ρ на ρ_1, ρ_1 на ρ_2 и m на $N(\rho_1)$,

$$|F(z)| < a_2 N(\rho)\left(\frac{2+\varepsilon}{\theta-2}\right)^{N(\rho_1)}[M(2\rho_1)]^{2(1+\delta)}. \tag{11}$$

Но опять или $F(z)=0$ или

$$F(z) > a_3\{N(\rho)M(2\rho)M[(2+\varepsilon)\rho_1]\}^{-(\nu-1)(1+\delta)} \tag{12}$$

при $z=\alpha_k+\beta_s$, $|z| \leqslant (1+\varepsilon)\rho_1$. Так как $\rho_1 > \rho \geqslant \rho'$, то неравенства (11) и (12) противоречивы. Поэтому $F(\alpha_k)=0$ при $|\alpha_k| \leqslant \rho_2 = (1+\varepsilon)\rho_1$. Повторяя без изменений эти рассуждения, мы придем к тому, что $F(\alpha_k)=0$ для всех значений $k=1,2,\ldots$ Но $|F(z)| < C(\rho)M(r+\rho)$, $|z|=r$. Поэтому из принципа максимума при $|z| \leqslant 1$, $|\zeta| = R = (\theta-1)r$

$$|F(z)| < C(\rho)\prod_{|\alpha_k|<r}\left|\frac{z-\alpha_k}{\zeta-\alpha_k}\right| M(R+\rho) < \left(\frac{2}{\theta-2}\right)^{N(r)} M(\theta r) \tag{13}$$

для любого достаточно большого r. Но, в силу неравенства (4) и условий $\theta > 4$ и $\lambda > 4(\nu+1)\ln\left(\frac{\theta}{2}-1\right)$, правая часть неравенства (13) стремится к нулю с ростом r и, значит, $F(z)\equiv 0$. Это и доказывает нашу теорему.

Итак, несущественна арифметическая природа элементов множества нормальной целочисленности целой функции $f(z)$, а достаточна для сужения класса функций, к которому $f(z)$ принадлежит, только возможность представления множества целочисленности в виде суммы двух достаточно плотных множеств.

Следствия из теоремы. 1. Если $f(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы, будет целой функцией минимального типа не выше первого порядка, то $f(z)$ может быть только многочленом, так как, как хорошо известно, других решений в этом классе функций уравнение (4) иметь не может (теорема Шюрера).

2. Если $f(z)$ — функция конечной степени, т. е. $\ln M(r) < cr, c < \infty$, то $f(z)$ может быть только конечной суммой произведений многочленов на показательные функции (та же теорема Шюрера).

Эта теорема дает также возможность доказывать, что нормально целочисленная функция $f(z)$ может быть только конечной суммой произведений многочленов на показательные функции также и в случае, когда $f(z)$ бесконечной степени, если известны дополнительно некоторые свойства множества целочисленности. Она может быть усилена как в смысле замены целочисленности $f(z)$ просто на алгебраичность ее значений с учетом роста знаменателей этих значений, так и в смысле замены условий $\theta > 4$, $\lambda > 4(\nu + 1)\ln\left(\frac{\theta}{2} - 1\right)$ на лучшие. Заметим, что условия (4) могут быть ослаблены только уменьшением постоянных θ и λ. Это непосредственно видно при $E_1 = E_2 = E$.

Поступило
27 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Pólya, Nachricht. Ges. Wiss. Göttingen, 1 (1920). [2] А. О. Гельфонд, Tohoku Math. Journ., 30, 280 (1929). [3] Th. Schneider, Math. Ann., 121, 131 (1949). [4] А. О. Гельфонд, Усп. матем. наук, в. 5, 14 (1949).