Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

В. Г. ВИНОКУРОВ

О КВАЗИ-ДОПОЛНЕНИЯХ В СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 IX 1951)

Пусть E — сепарабельное пространство Банаха, θ — его нулевой элемент. Подпространством пространства E мы будем называть всякое замкнутое линейное многообразие, принадлежащее E. Пусть P — подпространство пространства E. Подпространство Q называется квази-дополнением к P в E, если $P \cap Q = \theta$, а $[P+Q]=E$, т. е. замыкание прямой суммы P и Q совпадает с E.

Маккей ([1]) доказал, что всякое подпространство сепарабельного пространства Банаха имеет квази-дополнение. В настоящей работе доказывается, что если P и Q — подпространства пространства E, удовлетворяющие условию $P \cap Q = \theta$, то существует квази-дополнение к P, содержащее Q. Теорема Маккея получается как частный случай из этого предложения.

Всюду в дальнейшем мы будем считать, что E сепарабельно.

§ 1. Мы будем называть последовательность $\{y_i\}$ полной в линейном многообразии $Y \subset E$, если $y_i \in Y$ $(i=1,2,\ldots)$, а линейная оболочка над $\{y_i\}$ есть множество, плотное в Y.

Определение. Пусть $\{x_i\}$, $\{\varphi_i\}$ — биортогональная система, определенная на P, рассматриваемом как самостоятельное пространство Банаха (функционалы φ_i определены только на P). Мы будем говорить, что $\{x_i\}$, $\{\varphi_i\}$ имеет продолжение на E, или продолжаема на E, если существует биортогональная система $\{z_i\}$, $\{F_i\}$, определенная на E, имеющая полную в E последовательность $\{z_i\}$ и удовлетворяющая условиям: $z_{2k+1}=x_{k+1}$ и $F_{2k+1}(x)=\varphi_{k+1}(x)$ для всех $x \in P$ $(k=0,1,\ldots)$.

Лемма 1. *Пусть E — сепарабельное пространство Банаха, P — его подпространство и $\{x_i\}$, $\{\varphi_i\}$ — биортогональная система, определенная на P, с полной в P последовательностью $\{x_i\}$. Тогда система $\{x_i\}$, $\{\varphi_i\}$ продолжаема на E.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}$, $\{\varphi_i\}$ — биортогональная система на P с полной на P последовательностью $\{x_i\}$. Легко видеть, что существует последовательность линейно независимых элементов $\{y_i\} \in E \setminus P$, удовлетворяющая условиям: 1) никакая линейная комбинация элементов из $\{y_i\}$ не принадлежит подпространству P; 2) замкнутая линейная оболочка над элементами подпоследовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ совпадает с E.

В самом деле, как это было отмечено М. М. Гринблюмом, всегда существует аддитивный и однородный оператор, отображающий E на

P и оставляющий неподвижными точки подпространства P. Если Y — линейное многообразие элементов (вообще говоря, не замкнутое), в которых этот оператор обращается в нуль, то в качестве $\{y_i\}$ может быть взята всякая полная в Y последовательность линейно независимых элементов.

Мы будем строить в E биортогональную систему $\{z_i\}$, $\{F_i\}$ по следующему правилу. Пусть $z_1 = x_1$ и F_1 — какой-нибудь линейный функционал на E, являющийся продолжением линейного функционала φ_1. Мы будем иметь $F_1(z_1) = 1$. Пусть, далее, $z_2 = y_1 - F_1(y_1)\,x_1$, F_2 — произвольный линейный функционал, равный единице в z_2 и нулю на P. Ясно, что

$$F_1(z_2) = 0, \quad F_2(z_2) = 1, \quad F_2(z_1) = 0.$$

Пусть построены $z_1, z_2, \ldots, z_{2k}$; $F_1, F_2, \ldots, F_{2k}$. Полагаем $z_{2k+1} = x_{k+1}$; $F_{2k+1} = F^{2k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} F^{2k+1}(z_{2i})\,F_{2i}$, где F^{2k+1} — произвольное продолжение на E функционала φ_{k+1}. Очевидно, что

$$F_i(z_{2k+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2k);$$

$$F_{2k+1}(z_{2k+1}) = 1, \quad F_{2k+1}(z_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2k).$$

Далее полагаем:

$$z_{2k+2} = y_{k+1} - \sum_{i=1}^{2k+1} F_i(y_{k+1})\,z_i \qquad F_{2k+2} = F^{2k+2} - \sum_{i=1}^{k} F^{2k+2}(z_{2i})\,F_{2i},$$

где F^{2k+2} — произвольный линейный функционал, равный единице в z_{2k+2} и нулю на P.

Мы будем иметь:

$$F_i(z_{2k+2}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2k+1);$$

$$F_{2k+2}(z_{2k+2}) = 1, \quad F_{2k+2}(z_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2k+1).$$

Продолжая это построение, мы получим биортогональную систему $\{z_i\}$, $\{F_i\}$, являющуюся продолжением на E биортогональной системы $\{x_i\}$, $\{\varphi_i\}$. Таким образом, лемма доказана.

§ 2. Мы будем называть полную в E последовательность $\{x_i\}$ строго минимальной (²), если существует такая последовательность линейных функционалов $\{F_i\}$, что последовательности $\{x_i\}$ и $\{F_i\}$ образуют биортогональную систему, удовлетворяющую условиям $\sup\limits_i \|x_i\| < \infty$ и $\sup\limits_i |F_i| < \infty$. Мы будем называть биортогональную систему $\{x_i\}$, $\{F_i\}$ полной на E (³), если последовательность $\{x_i\}$ полна в E, а последовательность $\{F_i\}$ тотальна на E.

Лемма 2. *Пусть подпространства P и Q квази-дополнительны друг к другу в E, т. е. $P \cap Q = \theta$ и $[P + Q] = E$. Существует такая биортогональная система $\{z_i\}$, $\{F_i\}$ с полной в E последовательностью $\{z_i\}$, что:*

1) *$z_{2k+1} = x_{k+1} \in P$ $(k = 0, 1, \ldots)$, и если φ_{k+1} — функционалы, индуцированные на P функционалами F_{2k+1}, то последовательности $\{x_{k+1}\}$ и $\{\varphi_{k+1}\}$ образуют биортогональную систему, полную на P.*

2) $z_{2k}=y_k \in Q$ $(k=1, 2, \ldots)$, *и если* ψ_k — *функционалы, индуцированные на* Q *функционалами* F_{2k}, *то последовательности* $\{y_k\}$ *и* $\{\psi_k\}$ *образуют биортогональную систему, полную на* Q.

Доказательство. Мы будем говорить, что линейный функционал φ, определенный на P, является правильным относительно Q, если существует линейный функционал, определенный на E, совпадающий с φ на P и равный нулю на Q. Легко видеть, что множество Γ линейных функционалов на P, правильных относительно Q, тотально на P. Так как P сепарабельно, то Γ слабо сепарабельно [3], и поэтому в Γ существует счетное множество, тотальное на P.

Замкнутая линейная оболочка $\mathfrak{N}$ над этим множеством есть сепарабельное подпространство P^*, тотальное на P. В $\mathfrak{N}$ существует строго минимальная последовательность $\{\varphi'_i\}$ [4]. Существует такая последовательность чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, что, каковы бы ни были элементы $\eta_1, \eta_2, \ldots$ из $\mathfrak{N}$, удовлетворяющие условиям $|\eta_i| < \varepsilon_i$, последовательность $\{\varphi'_i + \eta_i\}$ остается строго минимальной [2]. Поэтому можно считать, что функционалы φ'_i правильны относительно Q, иначе их можно заменить такими.

Построим теперь полную на P биортогональную систему $\{x_i\}$, $\{\varphi_i\}$ следующим образом. Пусть $\{x'_i\}$ — последовательность линейно независимых элементов, полная в P. Полагаем $x_1 = x'_1$. Если $\varphi'_1(x_1) \neq 0$, то полагаем $\varphi_1 = \frac{1}{\varphi'_1(x_1)} \varphi'_1$. Если $\varphi'_1(x_1) = 0$, то заменяем φ'_1 через φ_1^0, где $|\varphi'_1 - \varphi_1^0| < \varepsilon_1$, φ_1^0 правилен относительно Q и $\varphi_1^0(x_1) \neq 0$. Полагаем $\varphi_1 = \frac{1}{\varphi_1^0(x_1)} \varphi_1^0$. Имеем: $\varphi_1(x_1) = 1$. Пусть определены $x_1, x_2, \ldots, x_k$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. Полагаем $x_{k+1} = x'_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x'_{k+1}) x_i$. Если $\varphi'_{k+1}(x_{k+1}) \neq 0$, то положим $\bar{\varphi}_{k+1} = \frac{1}{\varphi'_{k+1}(x_{k+1})} \varphi'_{k+1}$. Если $\varphi'_{k+1}(x_{k+1}) = 0$, то заменяем φ'_{k+1} через φ_{k+1}^0, где $|\varphi'_{k+1} - \varphi_{k+1}^0| < \varepsilon_{k+1}$, φ_{k+1}^0 правилен относительно Q и $\varphi_{k+1}^0(x_{k+1}) \neq 0$, и определяем $\bar{\varphi}_{k+1} = \frac{1}{\varphi_{k+1}^0(x_{k+1})} \varphi_{k+1}^0$. Полагаем: $\varphi_{k+1} = \bar{\varphi}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \bar{\varphi}_{k+1}(x_i) \varphi_i$. Имеем: $\varphi_i(x_{k+1}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; $\varphi_{k+1}(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Продолжая это построение, мы получим биортогональную систему $\{x_i\}$, $\{\varphi_i\}$, полную на P, причем все φ_i правильны, т. е. продолжаемы с обращением в нуль на Q. Точно так же построим полную на Q биортогональную систему $\{y_i\}$, $\{\psi_i\}$, где все ψ_i продолжаемы на E с обращением в нуль на P. Положим $z_1 = x_1$, $z_2 = y_1$, $z_3 = x_2$, $z_4 = y_2$ и т. д. Обозначим через F_1 линейный функционал на E, совпадающий с φ_1 на P и равный нулю на Q, через F_2 — линейный функционал на E, совпадающий с ψ_1 на Q и равный нулю на P, и т. д. Мы получим биортогональную систему $\{z_i\}$, $\{F_i\}$, удовлетворяющую условиям леммы.

§ 3. Условимся называть нулевой гиперплоскостью линейного функционала F гиперплоскость в пространстве E, состоящую из элементов, в которых F обращается в нуль. Существенное значение для этой работы имеет следующая лемма, принадлежащая М. М. Гринблюму.

Лемма 3. *Пусть* P — *подпространство пространства* E, $\{F_i\}$ — *некоторая последовательность линейных функционалов на* E, R — *пересечение нулевых гиперплоскостей этих функционалов и* φ_i — *функционалы, индуцированные на* P *функционалами* F_i.

Тогда, если последовательность $\{\varphi_i\}$ *тотальна на* P, *то* $P \cap R = 0$.

Доказательство. Пусть $z \in P \cap R$. Так как $z \in R$, то $F_i(z) = 0$ для всех i, но так как $z \in P$, то $\varphi_i(z) = 0$ для всех i и, в силу тотальности $\{\varphi_i\}$, $z = 0$, что и требовалось доказать.

§ 4. Теперь мы можем доказать основную теорему этой работы.

Теорема. *Пусть* E — *сепарабельное пространство Банаха,* P *и* Q — *подпространства* E, *удовлетворяющие условию* $P \cap Q = 0$.

Тогда существует содержащее Q *подпространство* R, *квази-дополнительное к* P.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $[P+Q]$, P и Q квази-дополнительны в нем и в $[P+Q]$ существует биортогональная система $\{z_i\}$, $\{F_i\}$, удовлетворяющая условиям леммы 2. На основании леммы 1 эта система продолжаема на E в систему $\{u_i\}$, $\{\Phi_i\}$. Пусть $\{\Phi_{i_k}\}$ — последовательность функционалов из $\{\Phi_i\}$, являющихся продолжением на E функционалов φ_k, определенных на P $(k = 1, 2, \ldots)$. Обозначим через R пересечение нулевых гиперплоскостей функционалов из $\{\Phi_{i_k}\}$.

Так как R есть замкнутое линейное многообразие, содержащее все элементы из $\{u_i\}$, не принадлежащие P, то замыкание прямой суммы P и R совпадает с E. В силу леммы 3, $R \cap P = 0$ и, значит, R есть квази-дополнение к P. В то же время $R \supset Q$. Таким образом, наша теорема доказана.

Безвременно скончавшийся Максимилиан Михайлович Гринблюм предложил мне задачу о существовании квази-дополнений. Его советы и руководство помогли мне решить ее.

Среднеазиатский государственный университет

Поступило 10 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. W. Mackey, Math. Rev., 7, No. 9, 455 (1946). [2] М. М. Гринблюм, ДАН, 47, № 2, 79 (1945). [3] S. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932. [4] А. И. Маркушевич, ДАН, 41, 241 (1943).