Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

Л. Л. ВЕРБИЦКИЙ

СТРОЕНИЕ КОНФОРМНО-ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА КЛАССА I ВО ВМЕЩАЮЩЕМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 IX 1951)

Целью настоящей заметки является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *Основная метрическая форма конформно-евклидова пространства V_n $(n \geqslant 4)$ класса 1, не сводящегося к пространству постоянной кривизны, может быть приведена к виду*

$$ds^2 = \frac{\psi^2 (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + \ldots + (dy^n)^2}{U^2}, \tag{1}$$

где U и ψ — квадратичные многочлены относительно $y^2, y^3, \ldots, y^n$ вида

$$U = \frac{a}{2}[(y^2)^2 + (y^3)^2 + \ldots + (y^n)^2] + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots + b_n y^n + c, \tag{2}$$

$$\psi = \frac{A}{2}[(y^2)^2 + (y^3)^2 + \ldots + (y^n)^2] + B_3 y^2 + B_3 y^3 + \ldots + B_n y^n + C. \tag{3}$$

Коэффициенты a, b_i, c, A, B_i, C многочленов U и ψ суть функции от y^1; если не все функции a, b_i, c сводятся к константам, то существует зависимость

$$\psi \equiv \Phi \frac{\partial U}{\partial y^1}, \text{ где } \Phi = \Phi(y^1), \tag{4}$$

и выполняются неравенства

$$\sigma^2(y^1) \equiv 2ac - (b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) - \frac{1}{\Phi^2} > 0, \quad \sigma \neq \text{const}. \tag{5}$$

Если же все функции a, b_i, c — константы, то выполняются неравенства

$$\sigma^2 \equiv 2ac - (b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2) > 0,$$
$$B_2 b_2 + B_3 b_3 + \ldots + B_n b_n - aC - cA \neq 0. \tag{6}$$

В остальном функции a, b_i, c, A, B_i, C могут оставаться произвольными.

Теорема 2. *Конформно-евклидово пространство V_n класса 1, вмещенное в евклидово пространство E_{n+1} $(n \geqslant 4)$, представляет собою в этом последнем либо гиперсферу, либо огибающую гиперсфер, зависящих от одного параметра.*

Теорема 3. *Координатные поверхности $y^1 = C$ конформно-евклидова пространства V_n $(n \geqslant 4)$ класса 1 в системе координат $y^1, y^2, \ldots, y^n$, в которой основная метрическая форма V^n имеет вид* (1), *суть сечения V_n в E_{n+1} гиперплоскостями E_n; эти сечения суть гиперсферы в секущих E_n (или „круги" с точки зрения E_{n+1}).*

Теорема 4. *Для того чтобы конформно-евклидово пространство V_n $(n \geqslant 4)$ класса 1, не сводящееся к пространству постоянной кривизны, было субпроективным, необходимо и достаточно, чтобы центры гиперсфер переменного радиуса, огибающей которых является V_n в E_{n+1}, лежали на одной прямой в E_{n+1}.*

Доказательства теорем 1—4. В заметке [1] нами было показано, что конформно-евклидово пространство V_n класса 1 при $n \geqslant 4$ характеризуется тем, что его тензор кривизны имеет вид

$$R_{ij,\,kl} = \sigma^2 (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) +$$
$$+ \sigma (\tilde{\sigma} - \sigma)(g_{ik} e_j e_l + g_{jl} e_i e_k - g_{il} e_j e_k - g_{jk} e_i e_l), \tag{7}$$

где σ и $\tilde{\sigma}$ суть, соответственно, $(n-1)$-кратная и простая главные кривизны V_n в E_{n+1} и e_i — единичный вектор; при $\tilde{\sigma} - \sigma \neq 0$ линии кривизны V_n, касающиеся в каждой точке вектора $e^i = g^{i\alpha} e_\alpha$, допускают ∞^1 ортогональных к ним поверхностей V_{n-1}, на каждой из которых скаляр σ сохраняет постоянное значение. В системе координат $y^1, y^2, \ldots, y^n$, в которой указанные выше V_{n-1} имеют уравнения $y^1 = C$ и координатными линиями y^1 являются линии кривизны V_n, ортогональные к семейству поверхностей $y^1 = C$, выполняется уравнение [1]

$$\frac{1}{2g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^1} = \frac{\sigma'}{\tilde{\sigma} - \sigma}, \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{dy^1}, \quad i, j = 2, 3, \ldots, n.$$

Правая часть здесь не зависит от i, j; следовательно, $\frac{1}{2g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^1} = \frac{1}{2g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial y^1}$, откуда $g_{ij} = g_{22} f_{ij}(y^2, y^3, \ldots, y^n)$. Отсюда находим

$$g_{ij}(y^1, y^2, \ldots, y^n) = g_{ij}(y^1_0, y^2, \ldots, y^n)\, \varphi(y^1, y^2, \ldots, y^n), \tag{8}$$

где φ не зависит от i, j $(i, j = 2, 3, \ldots, n)$.

Поверхность $y^1 = y^1_0$, как пространство постоянной кривизны [1], допускает систему координат $y^2, y^3, \ldots, y^n$, в которой ее метрический тензор выражается формулой

$$g_{ij}(y^2_0, y^2, y^3, \ldots, y^n) = \frac{\delta_{ij}}{U_0^2}, \text{ где } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j \end{cases} \tag{9}$$

и $U_0 = U_0(y^2, y^3, \ldots, y^n)$.

Из (8) и (9) следует

$$g_{ij}(y^1, y^2, \ldots, y^n) = \frac{\delta_{ij}}{U^2} \quad (i, j = 2, 3, \ldots, n), \quad U = U(y^1, y^2, \ldots, y^n).$$

Полагая еще $g_{11} = \psi^2 / U^2$ и учитывая, что $g_{1i} = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, приводим ds^2 к виду (1).

Вычисляя компоненты $R_{ij,\,kl}$ для метрической формы (1) и применяя условие (7) при различных комбинациях индексов i, j, k, l (учитывая, что $e_1 = \sqrt{g_{11}}$, $e_2 = e_3 = \ldots = e_n = 0$), получим систему дифференциальных уравнений для функций U и ψ; интегрирование этой системы приводит к равенствам (2), (3), (4) и неравенствам (5), (6).

Мы будем считать, что $\sigma \neq 0$ и $\tilde{\sigma} - \sigma \neq 0$. (При $\sigma = 0$ пространство V_n имеет класс 0, а не 1; при $\tilde{\sigma} - \sigma = 0$ V_n есть гиперсфера в E_{n+1}.) Поверхность V_n с метрической формой (1) в E_{n+1} определяется в этом случае уравнением

$$\bar{\rho} = \mathbf{r} + \frac{1}{U}(\mathbf{s} + y^2 \mathbf{e}_2 + y^3 \mathbf{e}_3 + \ldots + y^n \mathbf{e}_n), \tag{10}$$

где $\bar{\rho} = \overline{OM}$ — радиус-вектор точки M на V_n в E_{n+1}; при этом

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(y^1) = \int\limits_{y_0^1}^{y^1} \frac{a'}{aK}(\sigma\Phi \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1)\, dy^1, \quad a' = \frac{da}{dy^1}, \tag{11}$$

$$K^2 \equiv 2ac - b_\lambda b_\lambda, \quad \sigma^2 \equiv K^2 - \frac{1}{\Phi^2}, \quad \mathbf{s} \equiv \frac{1}{a}(K\mathbf{e}_1 + b_\lambda \mathbf{e}_\lambda) \tag{12}$$

и векторы $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (функции только от y^1) удовлетворяют в E_{n+1} системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0' &= -\frac{a\sigma\Phi}{K}\left[\left(\frac{K}{a}\right)' \mathbf{e}_1 + \left(\frac{b_\lambda}{a}\right)' \mathbf{e}_\lambda\right], \\ \mathbf{e}_1' &= \frac{a}{K}\left[\sigma\Phi\left(\frac{K}{a}\right)' \mathbf{e}_0 - \left(\frac{b_\lambda}{a}\right)' \mathbf{e}_\lambda\right], \\ \mathbf{e}_i' &= \frac{a}{K}\left[\sigma\Phi\left(\frac{b_i}{a}\right)' \mathbf{e}_0 + \left(\frac{b_i}{a}\right)' \mathbf{e}_1\right] \quad (i = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь штрихом обозначены производные по y^1; по значку λ в формулах (12), (13) и ниже производится суммирование по значениям $\lambda = 2, 3, \ldots, n$. Начальные значения для системы (13) выбираются так, чтобы в точке $y' = y_0'$ векторы $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ были в E_{n+1} единичными и взаимно-ортогональными; тогда вследствие (13) они остаются единичными и взаимно-ортогональными при любом y^1; действительно, если в правых частях равенств

$$(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k)' = \mathbf{e}_j' \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k' \quad (j, k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

заменить производные соответствующими правыми частями равенств (13), то полученная система дифференциальных уравнений для скалярных произведений $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ удовлетворяется при $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \equiv \delta_{jk}$. Полагая

$$\bar{\rho}_c \equiv \mathbf{r} + \frac{1}{k}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sigma K \Phi}\mathbf{e}_0, \quad \bar{\rho}_c = \bar{\rho}_c(y^1), \tag{14}$$

будем, вследствие (12) и (13), иметь

$$\bar{\rho}_c' = \frac{\sigma' K \Phi}{\sigma^2}\mathbf{e}_0. \tag{15}$$

Рассмотрим в E_{n+1} семейство шаров

$$(\bar{\rho} - \bar{\rho}_c)^2 = \frac{1}{\sigma^2}. \tag{16}$$

Характеристики семейства получим, присоединяя к (16) уравнение

$$(\bar{\rho}-\bar{\rho}_c)\,\mathbf{e}_0=\frac{1}{\sigma K\Phi}, \tag{17}$$

полученное дифференцированием (16) по y^1 с учетом (15). При каждом фиксированном y^1 вектор $\bar{\rho}$, определяемый равенством (10), обращает (16) и (17) в тождества, что доказывает теорему 2. Легко доказать, что и обратно, огибающая V_n гиперсфер от одного параметра в E_{n+1}, все главные кривизны которой, кроме, может быть, одной, как следует из теоремы Менье, равны, есть конформно-евклидово пространство.

Из (10) и последующих равенств вытекает, что при $y^1=C$ вектор $\bar{\rho}-\mathbf{r}$ остается в гиперплоскости E_n, построенной на векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, отложенных в E_{n+1} от точки с радиус-вектором $\mathbf{r}=\mathbf{r}(y^1)$. Обозначая через $\bar{\rho}_0$ вектор

$$\bar{\rho}_0=\mathbf{r}+\frac{1}{K}\mathbf{e}_1$$

и пользуясь (10), легко получить

$$(\bar{\rho}-\bar{\rho}_0)^2=\frac{1}{K^2},$$

и так как $K=K(y^1)$, то теорема 3 доказана.

В случае, когда все функции a, b_i, c — константы, уравнения (11), (12), (13) и (14) заменяются, соответственно, уравнениями

$$\mathbf{r}=\frac{1}{a}\int_{y^1_0}^{y^1} A\mathbf{e}_0\,dy^1,\quad K^2\equiv\sigma^3\equiv 2ac-b_\lambda b_\lambda,\quad \mathbf{s}\equiv\frac{1}{a}(K\mathbf{e}_1+b_\lambda\mathbf{e}_\lambda),$$

$$\mathbf{e}_0'=-\frac{\mathbf{e}_1}{K}\left(aC+cA-b_\lambda B_\lambda-\frac{\sigma^2}{a}A\right)-\left(B_\lambda-\frac{b_\lambda}{a}A\right)\mathbf{e}_\lambda,$$

$$\mathbf{e}_1'=\frac{\mathbf{e}_0}{K}\left(aC+cA-b_\lambda B_\lambda-\frac{\sigma^2}{a}A\right),\quad \mathbf{e}_i'=\left(B_i-\frac{b_i}{a}A\right)\mathbf{e}_0\quad (i=2,3,\ldots,n),$$

$$\bar{\rho}_c=\bar{\rho}_0=\mathbf{r}+\frac{1}{K}\mathbf{e}_1.$$

При этом V_n в E_{n+1} есть огибающая шаров постоянного радиуса $1/K$.

П. К. Рашевский [2] и Г. М. Шапиро [3] показали, что субпроективные пространства В. Ф. Кагана [4] принадлежат к числу конформно-евклидовых пространств класса 1. Теоремы 3 и 4 настоящей заметки устанавливают, что обратное предположение не имеет места. Теорема 4 доказывается применением критерия П. К. Рашевского [2] и уравнений (7), (12), (15); при этом оказывается, что субпроективное пространство характеризуется существованием функциональной зависимости $\tilde{\sigma}=F(\sigma)$.

Поступило
31 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Л. Вербицкий, ДАН, 81, № 2 (1951). [2] П. К. Рашевский, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1, 126 (1933). [3] Г. М. Шапиро, там же, 1, 102 (1933). [4] В. Ф. Каган, там же, 1, 12 (1933).