Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ БАЗИСОМ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 IX 1951)

В заметках [1] были рассмотрены гиперкомплексные системы с компактным базисом*; ниже мы рассмотрим гиперкомплексные системы с наиболее простым локально компактным базисом — счетным дискретным множеством. Результаты этой заметки, как и заметок [1], имеют много общего с исследованиями Б. М. Левитана [2, 3] по обобщенной операции сдвига.

1°. Роль базиса в дальнейшем играет счетное дискретное множество $T = \{j, k, l, \ldots\}$. Кубическую матрицу чисел C_{jkl} $(j, k, l \in T)$ назовем матрицей структурных констант, если $\sum\limits_l C_{jkl} C_{lrs} = \sum\limits_l C_{krl} C_{jls} < \infty$ $(j, k, r, s \in T$; ряды сходятся абсолютно) (условие ассоциативности), $C_{jkl} = C_{kjl}$ $(j, k, l \in T)$ (условие коммутативности) и существует последовательность положительных чисел μ_j такая, что $\sum\limits_j |C_{jkl}| \mu_l \leqslant \mu_j \mu_k$ $(j, k \in T)$.

Матрица структурных констант определяет гиперкомплексную систему (г. с.) Λ с базисом T, ее элементами служат последовательности $x = \{x_j\}_{j \in T}$, $\sum\limits_j |x_j| \mu_j < \infty$, а операция умножения порождается матрицей $\{C_{jkl}\}$ по формуле

$$(x * y)_l = \sum_{j, k} x_j y_k C_{jkl} \quad (x, y \in \Lambda).$$

Г. с. Λ является коммутативным нормированным кольцом относительно нормы $\|x\| = \sum\limits_j |x_j| \mu_j$ (мы предполагаем, что в Λ содержится единица, эту единицу назовем базисной (б. е.), если она расположена в базисе T). Очевидно, максимальные идеалы M кольца Λ находятся во взаимно-однозначном соответствии с ограниченными последовательностями t_j, для которых

$$\sum_l C_{jkl}\, \mathrm{t}_l \mu_l = \mathrm{t}_j \mu_j\, \mathrm{t}_k \mu_k \quad (j, k \in T), \tag{1}$$

при этом $x(M) = \sum\limits_j x_j \mathrm{t}_j \mu_j$ $(x \in \Lambda)$. Такие последовательности мы называем характерами и будем их отождествлять с соответствующими максимальными идеалами.

---

* Мы употребляем более соответствующий сути дела термин «гиперкомплексная система с компактным базисом» вместо термина «континуальная алгебра».

2°. Г. с. с дискретным базисом T и вещественными структурными константами назовем нормальной, если существует взаимно-однозначное отображение $j \to j^*$ базиса T на самого себя такое, что $(j^*)^* = j$, $C_{jkl} = C_{lk^*j}$, $\mu_{j^*} = \mu_j$, причем $\mu_j \geqslant \alpha > 0$ $(j, k, l \in T)$.

Простейшим примером нормальной г. с. с дискретным базисом служит групповое кольцо дискретной коммутативной группы G, в этом случае $j \to j^* = j^{-1}$ $(j \in G)$.

На нормальные г. с. при помощи известных методов теории колец может быть обобщен ряд теорем гармонического анализа на группе (теоремы типа Герглотца, Винера—Леви, тауберовской теоремы Винера). Часть таких теорем (в терминах операции обобщенного сдвига) была получена Б. М. Левитаном [2]. Мы не будем здесь проводить этих обобщений и остановимся лишь на следующем утверждении: введем в г. с. Λ инволюцию $\{x_j\} \to \{x_j\}^* = \{\overline{x}_{j^*}\}$ $(\{x_j\} \in \Lambda)$ и обозначим через $\mathfrak{G}$ компакт симметрических максимальных идеалов кольца Λ*. Каждый такой идеал и только он порождается некоторым эрмитовым (т. е. $\mathrm{t}_{j^*} = \overline{\mathrm{t}}_j$) характером г. с. Λ. При фиксированном j t_j является непрерывной функцией от $\mathrm{t} \in \mathfrak{G}$, обозначим ее через $j(\mathrm{t})$. Оказывается, что система функций $j(\mathrm{t})$ $(j \in T)$ ортогональна относительно некоторого веса $d\sigma(\mathrm{t})$ и полна в $L_2(\mathfrak{G}_\sigma)$, а сама г. с. Λ изоморфна кольцу непрерывных функций $x(\mathrm{t})$ на $\mathfrak{G}$ с обычным сложением и умножением, разлагающихся в μ-абсолютно сходящиеся ряды Фурье по системе $\{j(\mathrm{t})\}_{j \in T}$, т. е. таких $x(\mathrm{t})$, что

$$\sum_j \left| \int_{\mathfrak{G}} x(\mathrm{t}) \overline{j(\mathrm{t})} \, d\sigma(\mathrm{t}) \right| \mu_j < \infty.$$

3°. Покажем, в какой степени принцип двойственности Л. С. Понтрягина (для компактной и дискретной коммутативных групп) может быть обобщен на г. с. Алгебраическая схема приведенного ниже построения принадлежит Б. М. Левитану [3].

Пусть L — нормальная г. с. с компактным базисом Q и б. е., структурная мера $C(A, B, t)$ которой неотрицательна (см. [1])**. Напомним, что совокупность $T = \{\chi_j(t)\}$ $(t \in Q)$ ее характеров образует полную ортогональную систему на Q. Поступая аналогично тому случаю, когда Q — коммутативная компактная группа, а L — ее групповое кольцо, можно попытаться определить „двойственную“ операцию умножения к умножению в г. с. L, определив ее сперва на элементах базиса $T = \{\chi_j(t)\}$ в виде обычного перемножения функций, а затем распространив на линейные комбинации характеров. Переходя к коэффициентам Фурье, получим

$$\chi_j(t) \mu_j \chi_k(t) \mu_k = \sum_l C_{jkl} \chi_l(t) \mu_l, \tag{2}$$

где

$$\mu_j = \left(\int_Q |\chi_j(t)|^2 dt \right)^{-1/2}, \quad C_{jkl} = \mu_j \mu_k \mu_l \int_Q \chi_j(t) \chi_k(t) \overline{\chi_l(t)} \, dt. \tag{3}$$

Возникает вопрос, когда так определенные константы C_{jkl} являются неотрицательными структурными константами некоторой г. с. Λ с

---

* В отличие от группового кольца, Λ может оказаться несимметричным кольцом.
** Базисной единицей (б. е.) мы называем полюс континуальной алгебры (в терминологии [1]).

дискретным базисом и б. е. (числа μ_j определяются формулой (3)). Далее, сравнивая (1) и (2), заключаем, что аналогично случаю группы каждая точка $t \in Q$ порождает эрмитовый характер $t_j = \chi_j(t)$ г. с. Λ. Спрашивается, когда каждый эрмитовый характер г. с. Λ порождается точкой исходного компакта Q.

Будем говорить, что в существенном ограниченная функция $\varphi(t)$ $(t \in Q)$ (ограниченная последовательность φ_j $(j \in T)$) положительно определенна (п. о.), если для любых комплексных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и множеств $R_1, \ldots, R_n \subset Q$ (точек $r_1, \ldots, r_n \in T$) $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\sum_{k,\,l=1}^{n} \left(\int_Q \varphi(t)\, C(R_k, R_l^*, t)\, dt \right) \lambda_k \bar{\lambda}_l \geqslant 0 \quad \left(\sum_{k,\,l=1}^{n} \left(\sum_j \varphi_j\, C_{kl^*j}\, \mu_j \right) \lambda_k \bar{\lambda}_l \geqslant 0 \right).$$

Теорема 1. *Для того чтобы дискретное множество T характеров нормальной с неотрицательной структурной мерой и б. е. г. с. L с компактным базисом Q являлось базисом нормальной с неотрицательными структурными константами и б. е. г. с. Λ (двойственной г. с.), необходимо и достаточно, чтобы произведение $\varphi(t)\psi(t)$ $(t \in Q)$ любых двух п. о. функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ было п. о. Для того чтобы совокупность всех эрмитовых характеров двойственной г. с. совпадала с исходным компактом Q, необходимо и достаточно, чтобы произведение $\varphi_j\psi_j$ $(j \in T)$ любых двух п. о. последовательностей φ_j, ψ_j было п. о.*

Приведем некоторые примеры г. с. с дискретным базисом.

4°. Рассмотрим центр Z группового кольца компактной некоммутативной группы G. Как показано в ([4]), Z является г. с., базисом которой служит компакт классов сопряженных элементов группы G. Условия теоремы 1 в этом случае удается проверить, получаемое таким образом утверждение эквивалентно теореме Таннака — Крейна ([5, 6]) о совпадении группы представлений представляющей алгебры с исходной группой. Двойственная г. с. к Z состоит из функций, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды по характерам неприводимых представлений.

5°. Пусть Π — некоторое однородное симметрическое пространство, подвергающееся преобразованиям транзитивной компактной группы G. Пространство Π гомеоморфно компакту левых классов смежности G по некоторой подгруппе H. Как известно ([7]), функции из $L(G)$, постоянные на классах HgH $(g \in G)$, образуют замкнутое коммутативное подкольцо K группового кольца $L(G)$. Нетрудно видеть, что K является нормальной г. с., базисом которой служит компакт классов HgH, а базисной единицей — класс H. В этом случае условия теоремы 1 также можно проверить, двойственной г. с. служит совокупность функций на G, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды по зональным функциям.

6°. Остановимся на г. с. с дискретным базисом, построенных по ортогональным полиномам на ограниченном замкнутом множестве Q вещественной оси. Пусть $p(t)$ — вес на Q, $\{P_j(t)\}$ — ортонормированная относительно этого веса система полиномов, а $0 < \mu_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \ldots$ — такая последовательность чисел, что $P_j(t) / \mu_j$ равномерно по $j = 0, 1, \ldots$; $t \in Q$ ограничены. Обозначим через $\Lambda\{p(t), \mu\}$ полное нормированное пространство функций $x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j P_j(t)$ $(t \in Q)$, для которых $\sum_{j=0}^{\infty} |x_j| \mu_j = \|x\| < \infty$. Пространство $\Lambda\{p(t), \mu\}$ является г. с. с дискретным базисом и б. е., если только $\|x(t)\, y(t)\| \leqslant \|x(t)\|\, \|y(t)\|$ $(x, y \in \Lambda\{p(t), \mu\})$.

Рассмотрим два пространства $\Lambda\{p(t), \mu\}$ и $\Lambda\{\widetilde{p}(t), \widetilde{\mu}\}$ с одним и тем же множеством Q. Следуя Б. М. Левитану ([8]), будем называть оператором преобразования U, действующим из $\Lambda\{p(t), \mu\}$ в $\Lambda\{\widetilde{p}(t), \widetilde{\mu}\}$, оператор, определяемый матрицей $(u_{jk})_0^\infty = \left(\int \widetilde{P}_j(t) P_k(t) \widetilde{p}(t)\, dt\right)_0^\infty$ при помощи формулы

$$(Ux)_j = \sum_{k=0}^{\infty} u_{jk} x_k = \int x(t) \widetilde{P}_j(t) \widetilde{p}(t)\, dt \quad (x \in \Lambda\{p(t), \mu\},\ j = 0, 1, \ldots).$$

Обозначим через V оператор преобразования, действующий из $\Lambda\{\widetilde{p}(t), \widetilde{\mu}\}$ в $\Lambda\{p(t), \mu\}$. Очевидно, непрерывность обоих операторов U и V эквивалентна тому, что $\Lambda\{p(t), \mu\}$ и $\Lambda\{\widetilde{p}(t), \widetilde{\mu}\}$ топологически эквивалентны.

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda\{p(t), \mu\}$ *является г. с.,* $h(t) > 0$ $(t \in Q)$ *имеет ограниченную первую производную,* $1 / h(t) \in \Lambda\{p(t), \mu\}$ *и*

$$\left| \int \frac{h(t) - h(s)}{t - s} P_j(t) p(t)\, dt \right| \mu_j \leqslant k_j \quad (j = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

равномерно по $s \in Q$, *причем* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} k_j < \infty$. *Тогда операторы преобразования* U *и* V *для пространств* $\Lambda\{p(t), \mu\}$ *и* $\Lambda\{h(t) p(t), \mu\}$ *непрерывны. Если полиномы* $P_j(t)$ *равномерно на* Q *ограничены, то условие* (4) *можно заменить более слабым:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left| \int \frac{h(t) - h(s)}{t - s}\, P_j(t) p(t)\, dt \right| \mu_j \leqslant k < \infty.$$

Применяя эту теорему к ультрасферическим полиномам относительно веса $(1 - t)^{m/2-1}$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1,\ m = 1, 2, \ldots)$, являющимся зональными функциями групп движений m-мерных сфер в $m+1$-мерных евклидовых пространствах, можно получить следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $h(t) > 0$, *а* U *и* V *— операторы преобразования, построенные для пространств* $\Lambda\{(1 - t^2)^{m/2-1}, n^{\frac{m-1}{2}}\}$ *и* $\Lambda\{h(t)(1 - t^2)^{m/2-1}, n^{\frac{m-1}{2}}\}$, *где* $m = 1, 2, \ldots$ *Эти операторы непрерывны, если* $h(t)$ *имеет ограниченную производную порядка* $\left[\frac{m+5}{2}\right]$ *(при* $m = 1$ *достаточно 2-го порядка).*

Следствие. Если $f(t) \in \Lambda\{h_1(t)(1 - t^2)^{m/2-1}, n^{\frac{m-1}{2}}\}$ хотя бы при некоторой $h_1(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы 3, то $f(t) \in \Lambda\{h_2(t)(1 - t^2)^{m/2-1}, n^{\frac{m-1}{2}}\}$ для всякой другой $h_2(t)$.

Из последнего утверждения, в частности, вытекает аналог теоремы Винера — Леви для разложений по ортогональным полиномам относительно веса $h(t)(1 - t^2)^{m/2-1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$. При $h(t) \equiv 1$ такая теорема установлена М. Г. Крейном ([6]).

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
25 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. М. Березанский и С. Г. Крейн, ДАН, **72**, №№ 1, 2 (1950). [2] Б. М. Левитан, ДАН, **47**, №№ 1, 3, 5 (1945). [3] Б. М. Левитан, ДАН, **47**, № 6 (1945). [4] Ю. М. Березанский, ДАН, **72**, № 5 (1950). [5] T. Tannaka, Tohoku Math. Journ., **45**, 1 (1938). [6] М. Г. Крейн, ДАН, **29**, № 5—6 (1940); **30**, № 1 (1941). [7] И. М. Гельфанд, ДАН, **70**, № 1 (1950). [8] Б. М. Левитан, ДАН, **58**, № 6 (1947).